

研究終了報告書

「トポロジーを用いた紐状物質の研究」

研究期間: 2021 年 10 月 ~ 2024 年 3 月

研究者: 小鳥居 祐香

1. 研究のねらい

本研究の目的は、トポロジーにおける絡み目の研究を背景としたシンプルな指標を提唱することで、複数本の紐からなる紐状物質の形状に関する基礎理論を構築することである。さらにランダムトポロジーの概念も取り入れ、高分子レオロジーや生物学における様々な紐状物質に適用出来るような柔軟かつ強力な方法論を提示し、紐状物質の解析に新たなブレークスルーを与えることである。

2. 研究成果

(1) 概要

本研究では、3つの研究テーマについて行った。研究テーマ A 「開いた紐に対する指標の研究」、研究テーマ B 「色付き絡み目や空間グラフの絡み目ホモトピーの研究」、研究テーマ C 「ランダム絡み目の研究」。ここでは特に、テーマ B、C について詳細を紹介する。

(2) 詳細

研究テーマ B 「色付き絡み目や空間グラフの絡み目ホモトピーの研究」

二つの絡み目が絡み目ホモトピックであるとは、一方がもう一方に自己交差交換とアンビエント・アイソトピーの有限回の操作で移り合うことである。つまり、絡み目の絡み目ホモトピー類は、通常結び目理論で考えられる同値関係よりも弱い同値関係で分類された荒いクラスである。本研究では、絡み目の絡み目ホモトピーの概念の一般化である色付き絡み目の色付き絡み目ホモトピーや空間グラフの成分ホモトピーに関する研究を研究協力者の水澤篤彦氏と共にを行った。

絡み目の絡み目ホモトピー類の分類は Habegger と Lin によって分類された。これは比較可能な絡み目の絡み目ホモトピー不変量を用いた分類方法ではないが、彼らはこれを用いることにより、二つの絡み目が絡み目ホモトピー類として同値かどうかを判定できるアルゴリズムを構成している。私たちの研究は、この Habegger-Lin 理論を、色付き絡み目の色付き絡み目ホモトピーや空間グラフの成分ホモトピーに一般化したものである。ここで、空間グラフとは、抽象グラフの3次元球面への埋め込みであり(図1)、結び目や絡み目の一般化である。

色付き絡み目の色付き絡み目ホモトピー類の判別問題の証明の方針は、Habegger-Lin の定理に従って、色付きストリング絡み目と呼ばれるある種の色付き絡み目の表示法を与えるものである。これらの集合は群となり、その群構造をある性質を満たす群の列の半直積として与えることで、これらを分類する。また、異なる色付きストリング絡み目が、同じ色付き絡み目を表すこともあるが、その差を表す群作用を構成する。この作用の具体的計算を行うことによって、色付き絡み目の分類を行った。さらに、この分類を用いることによって、与えられた二つの色付き絡み目が色付き絡み目ホモトピックかどうかを判定するアルゴリズムを構成した。

空間グラフの成分ホモトピーについても同様に、色付きストリング絡み目の色付き絡み目ホモトピー類を用いることで、与えられた二つの空間グラフが成分ホモトピックかどうかを判定するアルゴリズムを構成した。本研究成果は arXiv に投稿済みである。

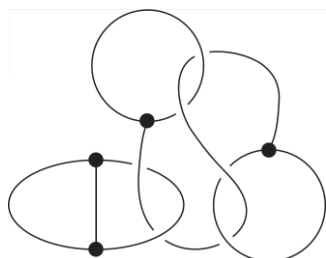


図1 空間グラフの例

研究テーマC「ランダム絡み目の研究」

本研究では、ランダム絡み目について研究を行った。絡み目とは、有限個の円周の3次元球面への埋め込みである。ランダム絡み目とは、絡み目の通常同値類全体の集合上の確率分布のことである。特にグリッド図式と呼ばれる絡み目図式を用いて、ランダムな2成分絡み目を構成し、その性質について確かめた。グリッド図式は図式のサイズを大きくすることで、全ての絡み目を表せることが知られている。図式のサイズを大きくしていった際のグリッド図式から得られるランダム絡み目がどのような性質を持つか調べるため、次の研究を行った。絡み数と呼ばれる絡み目不変量を用いて、グリッドランダム絡み目の絡み度合いの分布について調べた。特に、図式のサイズが n の時の2成分 n 次グリッド図式の絡み数の k 次モーメントが、次数 k 以下の n に関する多項式になることを示した。このとき、 k が奇数であれば図式の対称性から多項式は n になる。また、 $k=2$ のときは、最高次の項の具体的な値を決定した。さらに、絡み数を正規化することで、 n を無限大にした時、ある分布に弱収束することを示した。現在、上記の成果について論文を執筆中である。

3. 今後の展開

研究テーマB「色付き絡み目や空間グラフの絡み目ホモトピーの研究」

分子構造は、数学的に空間グラフと見なすことができる。本研究成果では、2つの空間グラフが成分ホモトピー類として同じかどうかを成分判定するアルゴリズムを作成した。そのため、分子構造に対して、成分ホモトピー類に対応する概念を得られれば、それらの判定を行うことが可能となる。このような対象について今後、化学分野の研究者と議論していきたい。また、その判別により、分子の機能との関連を調べたい。そのために、判定のための計算機プログラムを構成したいと考えている。1、2年以内に本問題に取り組みたいと考えている。

研究テーマC「ランダム絡み目の研究」

今研究では今後、他のランダム絡み目やランダム空間グラフのモデルを考え、化学や生物学に応用していきたい。まずは、良いモデルとなる対象を他分野の研究者と議論し、研究を進めていきたい。

4. 自己評価

本研究課題での研究目的の達成状況は当初の計画通りには行かなかったが、新たな展開となり、自身の研究分野を大きく広げることとなった。また ACT-X の主旨である若手のネットワークの形成には貢献できたと考える。異分野の研究者と交流する機会も多く、私自身もたくさんの研究者と知り合い議論することができ、有意義な時間を過ごすことができた。その中でも特に、融合研究に発展したものもあり、新しい価値の創造に繋がったと考える。またコロナのため、海外出張に行ける機会が少なかったため、特に最初の1年半の研究費の執行が計画通りに進まなかったが、コロナが明けた最終年度には従来通り使用することができ、研究を大きく進めることができた。また ACT-X 期間中、本研究成果を含む多くのアウトリーチ活動を行った。さらに私の従来の専門分野以外の場での講演も複数あり、研究成果の科学技術及び社会貢献・経済への波及効果は大きいと考える。以上のことから、本研究課題は有意義であったと考える。

5. 主な研究成果リスト

(1) 代表的な論文(原著論文)発表

研究期間累積件数: 件

1.	
2.	
3.	

(2) 特許出願

研究期間全出願件数: 件(特許公開前のものは件数にのみ含む)

1	発 明 者	
	発 明 の 名 称	
	出 願 人	
	出 願 日	
	出 願 番 号	
	概 要	

(3) その他の成果(主要な学会発表、受賞、著作物、プレスリリース等)

- 小鳥居 祐香, 水澤 篤彦, “空間グラフの component-homotopy 類の分類”, 日本数学会 2023 年度秋 季総合分科会, 東北大学, 2023 年 9 月.
- Yuka Kotorii and Atsuhiko Mizusawa, Homotopy theories of colored links and spatial graphs, arXiv:math/2312.12822.
- Yuka Kotorii, Atsuhiko Mizusawa, “ “Link-homotopy” of links, colored links and spatial graphs”, Dynamics & Statistics of Chiral Topological Matter, Massachusetts Institute of Technology(MIT), USA, October, 2023.

4. Yuka Kotorii, “Link invariants and link-homotopy”, SKCM2 Kick-off Symposium Hiroshima University, Japan, March, 2023.
5. Yuka Kotorii, Atsuhiko Mizusawa, “ “Link-homotopy” of spatial graphs”, Winter School on Low-dimensional Topology and Related Topics, Institute of Basic Science, Center for Geometry and Physics (IBS-CGP), at POSTECH, Korea, December, 2023.