研 究 終 了 報 告 書

「距離制約をもつ離散構造に対する解析理論の構築」

研究期間： 2020 年 11 月～2022 年 3 月
研 究 者： 大場　亮俊

1．　研究のねらい

グラフ剛性理論では、幾何ネットワーク（フレームワークおよびその一般化であるテンセグリティの総称）という距離制約をもつネットワークグラフを解析する。次の例のように、幾何ネットワークは科学・工学の諸分野に現れる。

1.　センサーネットワークの配置同定．センサーが散らばっており、アンカーとよばれるいくつかのセンサーの位置および互いに近いセンサー間の距離がわかっている。この情報から全てのセンサーの位置を特定するという課題である。「センサーを頂点集合とし、近いセンサー間に辺をもつネットワークグラフにおいて、辺の長さが与えられている」という幾何ネットワークが現れる。

2.　分子の構造解析．既知の分子Ａと局所的な幾何構造、結晶構造の同じ未知の分子Ｂが存在するかという課題である。原子間の距離や結合の角度が定まるため、局所的な距離制約が生まれている。

3.　テンセグリティの設計．テンセグリティとは棒と紐からなる安定な構造物である。紐は距離に関する不等式制約を生み出す。

幾何ネットワークに対して、距離制約を満たす幾何ネットワークが自分自身しかないとき、大域剛性をもつという。例 1 では、得られた情報が少ない場合複数のセンサー配置の候補が残る可能性がある。距離制約からセンサー配置が一意に復元できるかどうかは、大域剛性を持つかどうかと言い換えられる。例 2 も分子Ａから定まる幾何ネットワークの大域剛性の解析とみなすことができ、例 3 においても大域剛性を保証することにより安定性の保証が行われている。

1982 年に数学者の Connelly が超安定性と呼ばれる大域剛性の十分条件を与えた。その後グラフ実現問題における階数制約付き半正定値計画問題の解析に関連して、2000 年代に連続最適化の研究者たちにより大域剛性が再び脚光を浴びる。彼らにより、距離制約を記述する半正定値計画問題をランク緩和して、その双対問題を解くというアルゴリズムが作られ、例にあげた各方面で利用されている。

本研究は大域剛性解析をさらに発展させることを目的とし、無限幾何ネットワークの中では比較的簡単と考えられる周期構造モデルに対する超安定性アルゴリズムの構築、3 次元以上の一般大域剛性に対する組合せ的アルゴリズムを構築、グラフ理論および離散幾何への展開としてベクトル彩色数の解析を高速化および接吻数の計算への無限幾何ネットワークの大域剛性の手法の適用を目指した。

2．　研究成果

（1）概要

当初計画していた周期構造モデルの幾何ネットワークに対する超安定性アルゴリズムの構築を行った。これは半正定値計画問題の主双対性を用いた枠組みに依る。この枠組みの有

用性を示すために、折り畳み可能次元（実現可能次元）とよばれるグラフパラメータに注目した。結果として、この折り畳み可能次元の解析が本研究の主要な成果となった。

幾何ネットワークの折り畳み可能次元とは、雑に言うと距離制約を満たすようにその幾何ネットワークを折り畳むことのできる最小の次元のことである。グラフ G の折り畳み可能次元とは、G に支持される幾何ネットワーク全ての折り畳み可能次元の最大値のことである。実現可能次元が定数以下のグラフ全体はグラフのマイナー操作で閉じているため、有限個の禁止マイナーによる特徴づけが期待される。Belk-Connelly はフレームワークを考えた際の、実現可能次元が 1,2,3 以下となるグラフの禁止マイナーを与えた。

我々はこれを周期フレームワークおよびテンセグリティへ拡張した。まず周期フレームワークに対しては、ゲイングラフに対するパラメータとして実現可能次元を定式化した。そして、実現可能次元が 1 以下の禁止マイナーが $K_2^{=}$と K_3^0 であることおよび、2 以下の禁止マイナーが $K_3^{==}$とK_4^0であることを示した。特徴づけの証明において、上にあげたグラフが超安定的な実現をもつことを用いており、その点で先ほどの半正定値計画問題による枠組みの有用性を示している。

次にテンセグリティに対しては、多重グラフに対するパラメータとして実現可能次元を定式化した。実現可能次元が 1 以下のグラフは K_4 および K_3^2 が禁止マイナーであることを示した。一方、実現可能次元が 2 以下のグラフに対する特徴づけは未解決で、K_5 および K_4^2 の YΔ 族が禁止マイナーになるのではないかという予想に留まっている。ここに挙げた禁止マイナーに対しては超安定的な実現が存在することは確認済みであり、実現可能次元が 1 以下の場合についてはこれらを禁止マイナーにもつグラフの構造が簡潔なため具体的な折り畳みのアルゴリズムが作れているが、2 以下の場合についてはグラフ構造が複雑なため折り畳みが可能か分かっていない。一方で半正定値計画問題の双対側からは、与えられた多重グラフ G をある次元に超安定的に実現できるかという問いに関係するパラメータが得られることを発見した。これを Colin de Verdiere ラプラシアン型パラメータとよび、実現可能次元の下界となることを示した。これに対しては 1 以下，2 以下の禁止マイナーによる特徴づけを得た。その特徴づけは実現可能次元に対するもの（予想も含む）と同じである。

（2）詳細

① 周期構造モデルに対する超安定性の概念の拡張

そもそも幾何ネットワークの超安定性は Connelly により考案された概念で、釣合条件等の特定の性質を満たす辺重みが存在するという性質である。幾何ネットワークが超安定的ならば大域剛性（正確にはさらに強く、普遍剛性）を満たすことが示された。したがって超安定性の特定の条件を満たす辺重みを一つ見つけることができれば、通常は証明の困難な大域剛性を証明することができるのである。2000 年代に連続最適化の研究者により、半正定値計画問題の主双対性をもとに超安定性が解釈できることが判明した。詳しくは次のとおりである。まず幾何ネットワークが与えられた時、距離制約を満たす頂点配置全体をグラム行列を用いて記述し目的関数を 0 にすると、ランク制約つき半正定値計画問題になる。それに対してランク緩和を行ったものを主問題とよぶ。主問題の双対をとると辺重みが変数となるような半正定値計画問題が得られる。こちらを双対問題とよぶ。すると辺重みが釣合条件を満たすことはそれ

が双対問題の最適解になることと等価であるなど、この主双対の枠組みから超安定性が自然と出てくる。

したがって周期構造モデルの解析においても、周期構造モデルに対して半正定値計画問題の枠組みを拡張することで、自然と超安定性が得られるだろうと考えた。周期構造モデルに対してグラム行列をそのまま拡張してしまうとサイズ無限の行列となってしまうことが問題であった。ただ、周期構造モデルにおいては頂点軌道および辺軌道が有限個であるため、距離制約は代表点たちの座標と格子ベクトルという有限個のベクトルの 2 次式で表される。このことに注目し、d 次元代表頂点 n 個の周期テンセグリティのグラム行列を代表点の頂点配置および格子ベクトルの内積から得られる(n+d)×(n+d)の行列と定義した。これにより、周期テンセグリティが与えられたときにそれが定める距離制約を満たす頂点配置全体を、ランク制約つき半正定値計画問題の実行可能領域として記述した。その後ランク緩和を行い、双対を取ることにより、辺軌道上の重み（およびモデルによっては格子上の重み）を変数とする双対問題が得られた。この双対問題の最適性等の条件から適切に超安定性の概念を定義した。すると予想通り、超安定性が周期テンセグリティの大域剛性（より強く普遍剛性）の十分条件になっていることを示すことができた。

② 周期フレームワークの折り畳み

続いて上の研究の有用性を示すために、（1次元）周期フレームワークの折り畳み問題に取り組んだ。周期的でないフレームワークの折り畳みは Belk-Connelly によって行われている。それは以下のものである。D 次元フレームワーク(G,p)が d 次元に折り畳めるとは、全ての辺長がそれと等しい d 次元フレームワーク(G,q)が存在することをいう。そしてグラフ G が d-実現可能であるとは、G によって支持される任意次元の任意のフレームワーク(G,p)が d 次元に折り畳めることをいう。グラフ G が d-実現可能なとき、グラフ G からマイナー操作（辺削除、頂点削除、辺縮約）を行って得られるグラフ H について、H が d-実現可能であることが簡単に確認できる。したがってグラフマイナー定理より、固定した d に対して d-実現可能グラフは有限個の禁止マイナーを用いて特徴づけされる。Belk-Connelly は実際に d=1,2,3 に対して、K_3, K_4, K_5 および $K_{2,2,2}$ が完全な禁止マイナーのリストであることを証明した。その際、各極小禁止マイナーに対して、d+1 次元の超安定的な実現をその証拠となる辺重みとともに与えることで、d+1 次元で大域剛になるという論法を用いた。一方実際に折り畳む部分の証明は複雑なものとなっている。

我々は周期フレームワークに対する折り畳み問題を考えることで、周期フレームワークの超安定性の有用性を示せるのではないかと考えた。簡単なケースとして、1 方向への周期性をもつフレームワークを考えた。以下、周期フレームワークといった場合そのようなものを指すものとする。周期フレームワークはゲイングラフ G と代表頂点配置 p および格子 l で定まる。折り畳み問題を以下のように定式化した。周期フレームワーク(G,p,l)が d 次元に折り畳めるとは、格子も含む全ての辺長の等しい d 次元周期フレームワーク(G,q,l’)が存在することをいう。ゲイングラフ G が d-実現可能であるとは、それが支持する任意次元の任意のフレームワーク(G,p,l)が d 次元に折り畳めることをいう。我々は d-実現可能なゲイングラフを組合せ的に特徴づけることを目標とした。その方針として、ゲイングラフに対するマイナー操作を定義し、禁止

マイナーを列挙することを考えた。まず、ゲイングラフに対して、辺削除、頂点削除、ラベル 0 の辺の縮約に加えて、スイッチングとよばれる操作をマイナー操作と定めた。スイッチングとはある頂点に入る辺に+a をし、出ていく辺に−a をするという操作である。このとき、ゲイングラフ G が d−実現可能ならば、それからマイナー操作により得られる任意のグラフも d−実現可能なことが簡単にわかる。我々は d=1,2 に対して完全な特徴づけを行い、1−実現可能であることと $K_2^{=}$と K_3^0 をマイナーに持たないことの等価性および、2−実現可能なことと $K_3^{==}$と K_4^0 マイナーに持たないことの等価性を示した。

③　テンセグリティの折り畳み

上の研究を行ったのち、研究の主題が幾何ネットワークの折り畳みへと移っていった。特に(周期性のない)テンセグリティの折り畳みに関する問題に取り組んだ。テンセグリティの折り畳みに関しては、グラフの問題としての定式化が複数考えられ、いずれにせよ符号の解析が入るため、フレームワークの折り畳みより複雑な問題である。我々は以下のような定式化を行った。テンセグリティは多重グラフ G、辺上の符号 σ 、頂点配置 p で定まる。D 次元テンセグリティ(G, σ ,p)が d 次元に折り畳めるとは、それが定める辺長制約を満たす d 次元テンセグリティ(G, σ ,q)が存在することをいう。多重グラフ G が d−実現可能であるとは、任意の符号関数 σ および任意次元の任意の頂点配置 p に対して(G, σ ,p)が d 次元に折り畳めることをいう。この時、d−実現可能なグラフ全体は多重グラフのマイナー操作で閉じている。そこで、禁止マイナーによる特徴づけを考えた。まず d=1 の場合について、1−実現可能なことと K_4 および K_3^2 をマイナーにもたないことが同値であることを示した。禁止マイナーについては具体的に超安定的な 2 次元テンセグリティを構成することで示した。逆方向については、木幅が 2 以下となることから次数 2 以下の頂点が存在し、そこからいくつか場合分けをすることで帰納的に折り畳み可能であることが言える。続いて d=2 に対して考えた。K_5 および K_4^2 の YΔ族に対しては 3 次元で超安定的な配置を与えた。驚くべきことに、その中には、Snelson のテンセグリティや Connelly のテンセグリティという古くから安定性が知られていたものが現れた。一方で、これらが完全な禁止マイナーとなるかについては未解決である。これらを禁止マイナーにもつグラフの構造が複雑で、帰納的に折り畳むという議論が現状ではできないためである。

また、ACT−X を通じて多くの研究者と繋がる事ができた。特に藤井海斗氏、田中亮吉氏、七島幹人氏とグラフ理論と確率論に関する研究集会を月 1 回行い、最新の研究に関する知見の共有を行った。また河原林先生とも研究に関する議論を行った。

3.　今後の展開

上の研究のうち③において特に多くの課題を残した。「λ(G)が d 以下であることと d−実現可能であることは同値か」、「λ(G)+1 と ν(G)は一致するか」という問題である。特に前者が肯定的に解決されれば、未解決であった 2−実現可能グラフの特徴づけに関する予想が肯定的に解決される。まずはこれらに取り組むことを行いたい。

前者は半正定値錐の幾何構造に関する非常に根本的な問いである。半正定値錐を特定の方向に射影した図形は coordinate shadow と呼ばれており、その幾何学的性質については未知なことが多い。我々は本研究の以前に一般的な点における射影した際の振る舞い

については既に一定の知見を得ている。しかし前者の問いは一般的でない点の解析を必要としており、その解析に代数幾何的な手法を用いることを考えている。したがって数年のスパンで取り組む。

後者は行列のスペクトルに関する問題と捉えることができる。ただし、行列集合のスペクトルを見ている等、通常とは異なる問題設定であり、Colin de Verdiere 型パラメータの解析に対する進展の少なさを鑑みても、一筋縄ではいかない問題であると考えている。この問題に対しては、背後にある幾何的な問題設定と行列としての定式化の両面からアプローチすることで、数年での解決を目指している。

社会実装の面においては、折り畳みアルゴリズムが非常に重要と考える。3 次元の分子ネットワークを 2 次元に折り畳むというアルゴリズムの実装を行いたい。またこの際、連続的な変形をすることが必要となるため、現在のアルゴリズムではうまくいかない部分が存在している。現在は途中で高次元を介して変形をするというアルゴリズムになっており、それを回避するアルゴリズムを半正定値錐の低次元面構造から作りたいと考えている。また折り畳みの逆操作にあたる折り紙の設計にも展開をしていきたい。

4. 自己評価

当初は大域剛性の解析に関連して、複数の方向へ研究を発展させるつもりであったが、それとは少し異なる道筋となった。しかし、超安定性の枠組みを拡張したのち、幾何ネットワークの折り畳みを考える中で Colin de Verdiere 型パラメータというグラフ理論の研究対象と合流し、そちらの方向へ研究を広げることができた。また、ACT-X でのコミュニティを通じて多くの同年代の研究者（特に数学者）と出会い、実際にゼミ形式でグラフ理論と確率論に関して研究レベルでのやり取りを行うことができ、非常に貴重な体験となった。

5. 主な研究成果リスト

（1）代表的な論文（原著論文）発表

研究期間累積件数：1件

1. Oba, Ryoshun, and Shin-ichi Tanigawa. "Characterizing the universal rigidity of generic tensegrities." *Mathematical Programming* (2021): 1-37.
テンセグリティの普遍剛性に関して、Connelly は超安定性がその十分条件になることを示した。Gortler-Thurston はフレームワークに対しては、頂点配置に一般性を課した場合にそれが必要十分条件となることを示した。我々はまずこれをテンセグリティに対して拡張した。さらにテンセグリティが群対称性を持つ場合についても、それが対称性を除いて一般的ならば同様の主張が成り立つことを示した。証明において、群対称半正定値計画に対するブロック対角化および実有限群の既約表現を用いた。

（2）特許出願

研究期間全出願件数:0 件(特許公開前のものも含む)

(3)その他の成果(主要な学会発表、受賞、著作物、プレスリリース等)

講演:

1. Ryoshun Oba, Shin-ichi Taingawa
   Universal Rigidity of Generic Symmetric Tensegrities
   Workshop on Distance Geometry, Semidefinite Programming and Applications (as part of Thematic Program on Geometric Constraint Systems, Framework Rigidity, and Distance Geometry), Toronto, Canada (Online), May 2021
2. 大場亮俊, 谷川眞一
   周期グラフの d-実現可能性の特徴づけ
   日本応用数理学会 第 17 回研究部会連合発表会, オンライン, 2021 年 3 月
3. 大場亮俊, 谷川眞一
   Colin de Verdiere 型ラプラシアンパラメータとテンセグリティの実現可能次元
   Japanese Conference on Combinatorics and its Applications 2021 離散数学とその応用研究集会 2021, 慶應義塾大学, 神奈川, 2021 年 8 月
4. 大場亮俊, 谷川眞一
   Colin de Verdiere 型ラプラシアンパラメータとテンセグリティの実現可能次元
   日本オペレーションズ・リサーチ学会 2021 年秋季研究発表会&シンポジウム, オンライン, 2021 年 9 月