公開

研 究 終 了 報 告 書

「演算不変性を用いた整数計画問題のアルゴリズム開発」

研究期間: 2020 年 11 月～2023 年 3 月
研 究 者: 木村 慧

1. 研究のねらい

整数計画問題は社会・経済活動の様々な場面で利用されている離散最適化問題である. 整数計画問題は与えられた線形関数を線形不等式制約の下で最小化(あるいは最大化)する問題であり, 一般には効率的あるいは高速に解くことは難しいと考えられている. そのため, 発見的解法や精度保証付き近似アルゴリズム, 効率的に解ける部分クラスの研究が盛んに行われてきた. 既存解法の課題として, ソルバなどに組み込まれている汎用的解法は, その適用範囲は広いものの一般には多くの計算時間を要するという点が挙げられる. また, 個別の問題に特化した解法については, 高速に問題を解くことができるものの適用範囲が狭いという点が挙げられる. 一般に, 解法の汎用性と計算時間にはトレードオフがあると考えられる. そこで, 本研究では汎用的解法の高速化および高速な解法の汎用化を目指すことにより, よりよいトレードオフをもつ解法の開発を目指す. 具体的には, 演算不変性を整数計画問題へ導入することによりこのことを目指す. 演算不変性とは問題の解集合の性質であり, 問題の一つあるいは複数の解に対し, 演算を施してもやはり解となる, というものである. これは, 解集合の対称性を一般化したものとなっており, 整数計画問題の実行可能性問題を一般化した問題である制約充足問題において, 系統的な解法の開発に有用であることが知られている. そこで, 本研究では演算不変性を整数計画問題に積極的に導入することにより, 整数計画問題に対する高速かつ汎用的な解法の開発を目指す. より詳細には, 整数計画問題の解法の開発において重要な役割を担っている多面体的な性質や表現可能性を演算不変性により解析する. そして, この結果を利用することにより, 発見的解法および精度保証付き近似アルゴリズムを開発し, さらには効率的に解ける部分クラスを拡張することを目指す. また, 演算不変性は制御理論やゲーム理論における問題などにも現れることが知られており, これらの問題においては非線形関数や非線形制約が現れる. そのため, 本研究において線形関数および線形(不等式)制約に関する知見を深めることにより, 様々な分野における非線形な問題に対しても演算不変性を用いた技術が適用できるような基礎を提供することを目指す.

2.　研究成果

（1）概要

本研究では，まず，整数計画問題における諸性質と演算不変性との関係を解析する①「基礎理論の構築」を行った．また，この理論に基づき，②「実用的アルゴリズムの開発」を行った．より詳細には，基礎理論構築として，整数計画問題に対するアルゴリズムを開発する上で重要な性質である多面体的性質や表現可能性と演算不変性との関係を解析した．そして，この理論を用いて，整数計画問題に対する代表的な発見的解法である分枝限定法の高速化や様々な離散最適化問題に対する精度保証付き近似アルゴリズムの開発，そして効率的に解ける部分クラスの拡張を行った．それぞれの内容を以下に示す．

研究テーマ①基礎理論の構築

①−1「多面体の半整数性および双対問題の演算不変性による解析」

半整数性をもつ問題である単位係数二変数線形不等式からなる整数計画問題が，近傍永続性をもつことを示した．

①−2「表現可能性の演算不変性による特徴付け」

単位係数二変数線形不等式により表現可能性な解集合と，メディアン演算やその他の演算の下での不変性との関係を解析した．

①−3「演算不変性の圏論的解釈」

整数計画問題の実行可能性問題を拡張した問題である制約充足問題を扱った．そして，制約充足問題およびその演算不変性を圏論的に定式化し拡張した．

研究テーマ②「基礎理論に基づく実用的アルゴリズムの開発」

②−1「発見的解法の高速化」

単位係数二変数線形不等式制約からなる整数計画問題において，目的関数および変数が非負である場合に，基礎理論において示した近傍永続性を用いることにより，代表的な発見的解法の一つである分枝限定法の高速化を行った．

②−2「精度保証付き近似アルゴリズムの開発」

単位係数二変数線形不等式制約からなる整数計画問題において，目的関数および変数の取り得る場合が非負の場合に，近傍永続性を用いた新しい 2 近似アルゴリズムを提案した．

②−3「効率的に解ける部分クラスの拡張」

ある整数計画問題の部分クラスに対して，証拠付きアルゴリズムを提案した．

（2）詳細

研究テーマ①「基礎理論の構築」

①-1「多面体の半整数性および双対問題の演算不変性による解析」

任意の端点解の成分がすべて(半)整数であるという多面体の(半)整数性は，発見的解法・精度保証付き近似アルゴリズム・効率的アルゴリズムすべての開発において最も重要な性質の一つである．また，元問題と対となる双対問題も，整数計画問題のアルゴリズム開発に盛んに利用されている．当初の目的は，これらの性質と演算不変性との関係を明らかにことにあった．

本研究で得られた結果は，以下である．まず，半整数性をもつ問題である単位係数二変数線形不等式からなる整数計画問題が，近傍永続性をもつことを示した．近傍永続性とは，整数計画問題の解集合を，制約を満たす実数ベクトルの集合へと緩和した問題（以降，緩和問題）の任意の最適解に対して，その解において整数値を取る変数の値は変化させずに，非整数値を取る変数の値を切り上げるか切り下げるかすることにより，整数計画問題の最適解を求めることができるという性質である．この性質を利用した発見的解法の高速化および近似アルゴリズムについては，②-1および②-2において詳述する．本研究はオープラン株式会社 中山鼓太郎氏との共同研究である．本成果は，プレプリントレポジトリにて発表(5.(3).2)するとともに，国際会議 ISCO（International Symposium on Combinatorial Optimization）にて口頭発表を行った(5.(1).2).

①-2「表現可能性の演算不変性による特徴付け」

ある解集合が，ある特定の線形不等式系を満たすベクトルの集合となっているときに，その解集合はその特定の線形不等式により表現可能であるという．表現可能性と演算不変性との関係を解析することにより，特定のアルゴリズムの適用範囲を知ることができ，またアルゴリズム開発に演算不変性を利用することが可能となる．当初の目的は，いくつかの表現可能性といくつかの演算不変性との関係を明らかにすることであった．

本研究では，単位係数二変数線形不等式により表現可能である解集合と演算不変性との関係を解析した．このような解集合が，メディアン演算の下で不変であることは知られていたが，本研究では単位係数二変数線形不等式からなる整数計画問題の解集合を不変にする演算を計算機実験により列挙することで新たな演算を見出すことを検討した．

①-3「演算不変性の圏論的解釈」

整数計画問題の実行可能性問題を拡張した問題である制約充足問題を扱い，制約充足問題およびその演算不変性を圏論的に定式化し拡張した．これにより，演算不変性による解析を，複数の関数の中で最大の値を取る関数の値を最小化するという目的をもつ制約充足問題へ適用することが可能となった．本結果についての発表を行った 1,2)．本研究は，京都大学 岩政勇仁助教および Macquarie 大学 藤井宗一郎研究員との共同研究である．本成果は，プレプリントレポジトリにて発表(5.(3).1)するとともに，国際会議 ACT（International Conference on Applied Category Theory）にて共著者が口頭発表を行った(5.(1).1).

研究テーマ②「基礎理論に基づく実用的アルゴリズムの開発」

②-1「発見的解法の高速化」

単位係数二変数線形不等式制約からなる整数計画問題において，目的関数および変数が非負である場合に，基礎理論において示した近傍永続性を用いることにより，代表的な発見的解法の一つである分枝限定法の高速化を行った．より詳細には，近傍永続性を以下のように用いた解法を開発した．まず，緩和問題の最適解を線形計画問題に対する効率的なアルゴリズムにより求める．そして，その最適解において非整数値を取る変数を切り上げるか切り下げるかを 0-1 変数によって表し，0-1 整数計画問題を解く．以上が本解法のアイデアである．また，同問題が，最適値をパラメータとした際に，固定パラメータ容易であることを示した．すなわち，最適値が小さい問題に対しては理論的にも高速に解けることを示した．また，計算機実験により，本解法が既存のソルバよりも高速であることを確認した（中山鼓太郎．単位係数二変数制約からなる整数計画問題における近傍永続性．埼玉大学卒業論文，2021.）．本成果の理論的な部分は，基礎理論および近似アルゴリズムとまとめて，プレプリントレポジトリにて発表(5.(3).2)するとともに，国際会議 ISCO にて口頭発表を行った(5.(1).2).

②-2「精度保証付き近似アルゴリズムの開発」

最小化問題に対する2近似アルゴリズムとは，常に最適値よりも値が2倍以下の解を出力する解法のことを指し，このような解法を精度保証付き近似アルゴリズムと呼ぶ．本研究では，単位係数二変数線形不等式制約からなる整数計画問題において，目的関数および変数の取り得る場合が非負の場合に，近傍永続性を用いた新しい2近似アルゴリズムを提案した．本成果は，基礎理論および発見的解法とまとめて，プレプリントレポジトリにて発表(5.(3).2)するとともに，国際会議 ISCO にて口頭発表を行った(5.(1).2).

②-3「効率的に解ける部分クラスの拡張」

ここでは，「①基礎理論の構築」において明らかにした表現可能性と演算不変性との関係に基づき，これら両方を生かしたアルゴリズムの開発を行い，これにより，効率的に解ける部分クラスの拡張を行うことを目的とする．特に，既存研究でよく研究されている線形不等式に対する結果の拡張を目指す．この課題に対して，以下の結果を得た.

1. ある整数計画問題の部分クラスに対するアルゴリズム開発

証拠付きアルゴリズムとは，解を出力するとともに，その解が正しいことを高速に検証できるような証拠をも出力するようなアルゴリズムである．整数計画問題の緩和問題の場合には，最適値が存在するのであれば，元問題および双対問題の最適解がそのような証拠となる．また，最適値が存在しない場合には，最適値が非有界である場合と解集合が空集合である場合があるが，それぞれ，ある双対問題の解がそのような証拠となる．本研究では，ある整数計画問題の部分クラスに対する証拠付きの組合せ的アルゴリズムを提案した．さらに，この結果をより一般的な整数計画問題へと拡張した.

2. 単位係数二変数線形不等式制約からなる整数計画問題の拡張に向けて

単位係数二変数線形不等式制約からなる整数計画問題を拡張した問題の解集合がもつ演算不変性を求めるプログラムを作成し計算機実験を行った．現在のところ，新しい演算は得られていないので，さらに計算機実験を行う予定である．

3.　今後の展開

演算不変性に着目することにより，整数計画問題における性質の良い部分クラスを見出すことができ，様々なアルゴリズムの開発へと至った．そのため，今後は，既知の性質の良い部分クラス以外の新たな部分クラスおよび関連する演算不変性を見出すことが興味深い研究の方向性と考えられる．

また，線形不等式による表現可能性と演算不変性との関係については，当初の目的を完遂するには至っていない．これは，類似研究があまりないこともあり，数学的な取り扱いに困難があるためであり，証明技法のさらなる追求が今後の課題である．これについては，次の2，3年の内に解決したい．

さらに，今回の研究では線形関数や線形不等式と演算不変性との関係を解析したが，これを非線形関数や非線形制約と演算不変性との関係に拡張することは今後の大きなテーマである．このような非線形関数や非線形制約をもつ問題は，数理最適化だけでなく，制御理論やゲーム理論などにも現れる．

4.　自己評価

当初の研究計画においては，いくつかの整数計画問題の部分クラスと演算不変性との関係に焦点を当ててそれぞれの研究課題を達成することを目的としていた．その結果，ほとんどの課題においていずれかの演算不変性に関係する問題に対する成果を得ることができたことは良かったことであると考える．一方で，すべての課題において様々な演算不変性に関する結果を得ることは力と時間の不足により叶わなかった．しかしながら，研究の方向性を示すことは出来ているので，引き続き研究を進めていく所存である．

研究実施体制や研究費執行においては，コロナ禍のために出張の機会が少なくなり，他研究者との交流の機会が減ったために，研究に関するディスカッションも減ったことは否めない．既に構築された人間関係の下ではオンラインツールにより交流が出来たが，新たな交流を行う機会が少なかったのは残念なことである．

研究成果の波及効果については，本研究は理論的な側面が強いものの，②-1 の結果について，簡単ではあるが計算機実験を行うことで提案解法の有効性を見ることができたことは良い成果であった．一方で，本成果が社会で利用されるようになるためには，たとえば，本成果が整数計画ソルバ開発者の知るところとなることが重要であると思われる．

5.　主な研究成果リスト

（1）代表的な論文（原著論文）発表

研究期間累積件数：2件

1. Soichiro Fujii, Yuni Iwamasa, and Kei Kimura. Quantaloidal approach to constraint satisfaction. Proceedings of the 4th International Conference on Applied Category Theory.

to appear.
整数計画問題の実行可能性問題を拡張した問題である制約充足問題を扱い，制約充足問題およびその演算不変性を圏論的に定式化し拡張した．具体的には，まず，制約充足問題の解集合とその演算不変性が2圏 PFinSet の中で定式化できることを指摘した．そして，この定式化を PFinSet から quantaloid へと拡張した．さらに，特殊な quantaloid を考えることにより，複数の関数の中で最大の値を取る関数の値を最小化するという目的関数をもつ制約充足問題に対する解法を開発した．
2. Kei Kimura and Kotaro Nakayama. Neighborhood persistency of the linear optimization relaxation of integer linear optimization. Proceedings of the 7th International Symposium on Combinatorial Optimization. 2022. LNCS 13526, 312-323.
整数計画問題の線形緩和が永続性をもつとは，線形緩和の任意の（実数）最適解に対し，その整数値を取る変数の値が一致するような元問題の（整数）最適解が存在するときにいう．本研究では，永続性を強めた近傍永続性という概念を定義し，単位係数二変数不等式制約からなる整整数計画問題のクラスが，その線形緩和が（近傍）永続性をもつ整数計画問題のクラスとして極大であることを示した．また，系として，固定パラメータ容易性に関する結果を示した．

（2）特許出願

該当なし

（3）その他の成果（主要な学会発表、受賞、著作物、プレスリリース等）

プレプリント等

1. Soichiro Fujii, Yuni Iwamasa, and Kei Kimura. Quantaloidal approach to constraint Satisfaction. arXiv. 2021, 2107.01778, 1-17.

2. Kei Kimura and Kotaro Nakayama. Neighborhood persistency of the linear optimization relaxation of integer linear optimization. arXiv. 2022, 2203.04557, 1-17.

口頭発表

1．木村慧，中山鼓太郎．整数最適化の線形緩和における近傍永続性．日本応用数理学会 2022 年度年会，オンライン，2022 年 9 月．