公開

研 究 終 了 報 告 書

「量子論基礎にかかる高次元バナッハ空間の幾何学的研究」

研究期間: 2020 年 11 月～2023 年 3 月
研 究 者: 辻 寛

1. 研究のねらい

量子論基礎の研究のひとつに Asymptotic Geometric Analysis（AGA）を用いる方法がある。AGA とは、高次元のユークリッド空間内の凸体の幾何学的性質を調べる分野であり、とくに空間次元と幾何学的な量の関係を調べることが主要な問題となっている。場合によっては、次元の依存度のみならず、幾何学的な量の最適な評価や性質を調べることが重要であることもある。AGA における近年の研究では、凸体に対する幾何学的な量に制限せずに, 対数凹な確率測度と呼ばれる測度のクラスに対する幾何解析的な量を調べる研究が発展している。このような視点は、凸体の体積や断面積、平均幅、分布などの測度による視点が伴う幾何学的な量を扱う問題において特に有効に利用されている。すべての凸体は、例えば、その集合上の一様分布をかんがえることによって対数凹な確率測度とみなすことが可能であるため、凸体に対する特定の幾何学的問題は対数凹な確率測度に対する問題に変換することができる。このような変換の利点の一つは幾何学的な問題を解析的な問題に変換することができる点であり、ゆえに豊富な幾何解析的な手法や視点を他分野から輸入することができると考えられる。そのようなアプローチの代表例が最適輸送理論とそれに付随するリッチ曲率に基づく微分幾何学の理論である。最適輸送理論では2つの相異なる確率測度間の輸送に関する性質が調べられており、多様体上のリッチ曲率の下界はその輸送と相対エントロピーを通して理解することができる。とくに、対数凹な確率測度はこの理論を通して、リッチ曲率との相性が非常によい。

本研究では上述したような背景を踏まえ、最適輸送理論や相対エントロピーによるリッチ曲率に関する理論を用いることにより、凸幾何学内の幾何学的問題への新たなアプローチを構成し、実際に課題を解決することが主要な目的である。とくに、凸幾何学の近年の研究では、相対エントロピーを用いた情報理論的な理解が推し進められているが、そのような理論はいまだ十分に展開しておらず、今後の発展が望まれている。本研究においても、相対エントロピーを主軸とした理論形成をおこない、最適輸送理論やリッチ曲率の理論などをとおして凸幾何学的な問題解決を図っていく。

2. 研究成果

（1）概要

本研究での主要な具体的成果は以下の二つである。

1. 重みつきリーマン多様体上での dilation 不等式の構成、及び相対エントロピーを伴った関数不等式の構成。
2. 熱流による Blaschke–Santaló 不等式の理解と inverse Santaló 不等式への応用。

以下では、各々の成果の概要を簡単に述べる。

成果１では dilation 不等式と呼ばれる不等式に関する調査を行った。古典的な dilation 不等式は、ユークリッド空間上に対数凹な確率測度と凸集合が与えられたときに、凸集合の相似拡大に伴うその体積の変化の記述を与えている。近年の研究の進展によって、古典的な dilation 不等式は凸集合とは限らない可測集合に対しても適切な意味で拡張可能なことが確認されており、この発展はユークリッド空間ではない空間（非負のリッチ曲率をもつリーマン多様体）においても記述できることが確認されている。本研究成果の一つ目は、一般のリッチ曲率の下限をもつリーマン多様体上での dilation 不等式の構成を与えたことである。またこの研究での二つ目の成果は、dilation 不等式と相対エントロピーの関係を見出したことである。とくにこの関係によって、凸幾何学などの文脈の中で知られていたいくつかの事実を、相対エントロピーを通して再び見出すことに成功した。

成果２では、Blaschke―Santaló 不等式と inverse Santaló 不等式を取り扱った。これらの不等式では、ユークリッド空間内の原点対称な凸体とその偏極体のそれぞれの体積の積が主要な考察対象となる量である。Blaschke―Santaló 不等式とは、その幾何学的な量の最適な上界を与える不等式であり、逆に inverse Santaló 不等式とはその幾何学的な量の下界を与える不等式を指す。しかし現在まで、その最適な下界評価はいまだ完全には示されておらず、この問題は Mahler 予想という名で知られている。本研究での成果の一つ目は、特定の制限下において inverse Santaló 不等式を構成したことである。またこの構成のアイデアにつながる成果として、Blaschke―Santaló 不等式を熱流に基づいた再構成方法によって見出したことが挙げられる。これは本研究での二つ目の成果である。

（２）詳細

成果１．重みつきリーマン多様体上での dilation 不等式の構成、及び相対エントロピーを伴った関数不等式の構成。

古典的な dilation 不等式は、凸幾何学の文脈では Borell の補題という名前でもともと知られている不等式である。起源となる Borell の補題は、ユークリッド空間上に対数凹な確率測度と凸集合が与えられたときに、凸集合の相似拡大に伴って、その補集合の体積が指数的に減衰していくことを主張している。この不等式の重要な点は、その不等式自体が空間の次元に依存しない評価を与えている点であり、この利点は無限次元空間上での解析においても Borell の補題は有効であることを示唆している。近年の Borell の補題に関連する研究では、凸集合とは限らないボレル可測集合に対しても適切な相似拡大を考えることによって、同様の現象が一般の集合に対しても最適な形で成り立つことが示されている。今日では、この一般化された最適な不等式を dilation 不等式と呼んでいる。

一般化された dilation 不等式では一般化された相似拡大を取り扱うが、この相似拡大の利点は、その構成が空間の幾何構造のみを用いて行われる点にある。中学数学で学ぶような通常の相似拡大では、基点（通常は原点）とスカラー倍という代数的構造が必要とされるが、dilation 不等式で扱う相似拡大はそのような構造を必要としない。とくに、一般化された相似拡

大は任意の距離空間上でも自然に定義することが可能である。この利点によって、ユークリッド空間とは限らない空間上での dilation 不等式が意味をもち、実際に非負の重みつきリッチ曲率を持つリーマン多様体上で dilation 不等式が成立することが確認されている。ここでの非負の重み付きリッチ曲率は、ユークリッド空間上で対数凹な確率測度を考えることに対応していることを注意しておく。

本研究では、以上のような先行研究をふまえ、一般の重みつきリッチ曲率の下限をもつリーマン多様体上での dilation 不等式の構成を考察し、測地的凸集合に対する最適な dilation 不等式の構成に成功した。とくに、この研究成果はすでに知られていた等周不等式の結果の類似物として理解することも可能である。また本研究では、dilation 不等式から従う関数不等式についても考察し、その結果として相対エントロピー・Tsallis エントロピーに関連する不等式の構成に成功した。その不等式の派生として、凸幾何学などの文脈ではすでに知られている Kahane–Khinchine の不等式や、新しい派生として対数ソボレフ不等式の構成などにも成功した。とくに本研究成果では、凸幾何学的事実を、相対エントロピーを通してみることを可能にしており、その視点が既知の事実の復元を与えることや、その視点から新しい知見を得られることを提示している結果となっている。これらの研究では、重みつきリッチ曲率に関連する微分幾何学の理論と最適輸送理論が重要な役割を成していることを注意しておく。

成果２．熱流による Blaschke–Santaló 不等式の理解と inverse Santaló 不等式への応用。

原点を含むすべての凸体に対して、自然にその偏極体が定義される。これはバナッハ空間の言葉で述べるならば、バナッハ空間としての双対空間を考えることに対応する。なぜならば、原点を含むすべての凸体は、線形空間上に定義される（非対称）ノルムの単位球を通して、一対一対応するからである。本研究では特に、原点を含む凸体とその偏極体のそれぞれの体積の積を扱う。これは volume product と呼ばれる幾何的量であり、Blaschke–Santaló 不等式は volume product の最適な上界を与える。具体的には、volume product は原点対称な楕円体によって最大化されることが知られている。一方で、volume product はどのような凸体で最小化されるか、という問題も考えられる。この問題を考えることは、volume product を下から評価することに対応し、そのような不等式は inverse Santaló 不等式と呼ばれる。現在までの研究では、volume product の最適な下界評価は3次元までしか示されておらず、高次元の問題は Mahler 予想と呼ばれる未解決問題となっている。より正確には、Mahler 予想は凸体に対称性を課す場合と課さない場合の二通り存在し、対称な場合は4次元以上が未解決であり、非対称な場合は3次元以上が未解決である。

本研究では、凸体が“ある程度曲がっている”ならば、volume product はその曲がり方に応じた下界評価を持つことを明らかにした。とくに、十分に凸体が“曲がって”いれば、Mahler 予想は正しいということである。本研究では、この結果を示すに至った途中過程のアイデアも非常に新しく、重要であることを強調しておく。実際、本研究では正規分布に基づく熱方程式の解を用いて、Blaschke–Santaló 不等式と inverse Santaló 不等式を導くような対となる関数不等式を見出すことに成功した。とくに、Blaschke–Santaló 不等式を導く熱の関数不等式が実際に正しいことを確認することができ、また同様に inverse Santaló 不等式を導く熱の関数不等式

が部分的には正しいことを確認することによって、volume product の下界評価を得ることに成功した。このような熱を用いたアプローチに至った背景には、相対エントロピーに関するリッチ曲率の微分幾何学と最適輸送理論による視点が大いに役立っていることも強調しておく。実際、熱方程式の解は相対エントロピーの勾配流とみなすことができるため、この関係を通して熱方程式の解と相対エントロピーなどに関連する莫大な研究が今日までに行われている。本研究では、特に熱方程式の解とハミルトン・ヤコビ方程式の解の関係に着目することで、今回のようなアプローチを見出すに至った。また、ここでは述べていない成果ではあるが、以前に対数ソボレフ不等式とTalagrand不等式の改良に関する研究を行っている。そこで用いた手法が今回の研究でも有効であったことも本研究成果に至った要因となっている。

最後に研究当初の構想と実際の研究成果との比較、及び本研究成果の立ち位置について述べる。当初の研究計画では、Dvoretzky 型の定理を構成すること目指していた。Dvoretzky型の定理とは、簡単に述べるならば、すべての凸体の低次元空間への射影は正規分布に全変動距離の意味で近いというものである。この近さの概念を相対エントロピーや最適輸送距離を用いても正しいかどうかを調べることを課題としていた。この課題を考えていた理由としては、高次元凸幾何学において基本的な Dvoretzky の定理を相対エントロピーによる視点から理解できるかという問題意識によるものであるが、実際の解決には現状至っていない。一方で、その過程として、最適輸送距離の比較や対称型 Talagrand 不等式のさらなる理解なども目指していた。最適輸送距離の比較においても、期待していた結論にはいまだ到達していないが、その目的のために関心を持った問題が Kahane-Khinchine の不等式であり、その発展のために dilation 不等式の考察を行った。実際、この研究を通して、相対エントロピーによるKahane-Khinchine の不等式の構成を見出すに至った。また対称型 Talagrand 不等式のさらなる理解のために行った考察が、volume product の熱による理解である。従来の研究により、すでに対称型 Talagrand 不等式が Blaschke–Santaló 不等式と関連していることは知られていた。この事実から、当初の研究では、これらの不等式を導く対数ソボレフ不等式を見出すことに関心を持っていたが、そのような結論を得るには至っていない。一方で、その問題を解決するために行った考察が熱による関数不等式の構成であり、本研究成果2に至った経緯である。

3. 今後の展開

研究成果1では、dilation 不等式を通して相対エントロピーによる視点と、凸幾何学的事実の構成、及び一般の多様体上での類似物の構成を行うことができた。しかしながら、この研究で得られた相対エントロピーを用いた関数不等式は最適な形ではないと考えられる。とくに、この関数不等式と dilation 不等式は同等であることが期待されるが本研究で得られた不等式はそのような関係を持ちえないことがわかっている。今後の研究では、dilation 不等式と同等な相対エントロピーを用いた関数不等式の構成を目指す。また本研究では、相対エントロピーだけではなく、Tsallis エントロピーに関する関数不等式も得られている。しかしながら、Tsallis エントロピーに関する関数不等式がどのような凸幾何学的な知見を含んでいるのか、または対数ソボレフ不等式のような関数不等式に関連するのかなどは全く明らか

になっていない。加えて、dilation 不等式と等周不等式の関係を明らかにすることも重要である。本研究でも dilation 不等式を等周不等式の一種とみなすことにより dilation 不等式の構成を行ったが、dilation 不等式と等周不等式は非常に酷似していると思われる。これらの類似性や違いをより明らかにしていくことは非常に重要であるように思われる。とくにこの方向の研究は、等周不等式の一つの予想として知られている Kannan–Lovász–Simonovits 予想にも貢献し得ると考えている。前者で述べたような課題は数年のうちに解決できると思われるが、等周不等式との関係性の解明及び Kannan–Lovász–Simonovits 予想への展開などは長期的な課題になると考えられる。

研究成果2に関して、一番の目指すべき課題は Mahler 予想の解決である。とくに本研究で新しく見出した、Mahler 予想を導くような熱を用いた関数不等式を構成することが課題である。また、Mahler 予想は多岐にわたる分野に関連していることがしられており、特に数の幾何学において多くの問題解決に貢献することが知られている。数の幾何学では、与えられた凸体に含まれる格子点の個数を調べることが中心的な課題であるが、この分野における問題は結晶構造や格子暗号に関連するものなどがある。これらの問題と Mahler 予想とのさらなる関係の展開や、今回の研究で行ったアプローチの数の幾何学への輸入などにも取り組んでいきたい。これらの課題は、Mahler 予想が 75 年あまり未解決であったことから想像されるように、非常に長期にわたるものであると考えられる。

また量子論の枠組みへの展開も期待したい。とくに本研究で取り扱った熱に関連する関数不等式は量子論の枠組みにおいても重要であり、意味を成す。特に量子論の枠組みにおいては、テンソルされた作用素ノルムが分解されるとは限らないため、古典の枠組みで行われるテンソルの議論は一般に通用するとは限らない。本研究では、近年発展してきた新たな手法を用いており、この手法は既知の事実を復元するだけではなく、関数不等式をさらに改良するなどの豊富な使い道があることが知られている。この手法が量子論の枠組みにおいても有効であるかどうかは非常に興味深い問題であると考えられる。

4. 自己評価

研究目的の達成状況

相対エントロピーを通した凸幾何学への展開という点において、本研究成果はある程度の達成をしていると考えている。より具体的には、本研究では dilation 不等式の考察を通して、相対エントロピーに関連する関数不等式を構成し、凸幾何学などの文脈で知られる事実の構成に成功した。また熱を用いた関数不等式の考察を通して volume product の評価への新しいアプローチを提供したが、ここで展開される議論は相対エントロピーと熱を用いて展開される既知の理論の一部として理解できる。このような相対エントロピーの理論を通した凸幾何学への理論展開は、本研究の目的に適合しており、本研究成果はある程度の貢献を与えている。

一方で、当初の研究計画では Dvoretzky 型の定理の構成を視野に入れていたが、その方向の研究は停滞しており十分な成果は得られていない。また関連する最適輸送距離や相対エントロピーの比較に対しても、dilation 不等式を通して Kanahe–Khinchine の不等式の構

成には成功したが、最終的に十分な進展は得られていない。また研究当初では量子論への展開も期待していたが、その枠組みでの問題解決や本研究成果の展開などには至っていないのが現状である。

以上のように、凸幾何学における問題に相対エントロピーを通して再解釈をあたえ、新しい理解や理論を形成していくという点においてはある程度の研究目的への貢献をしたと考えているが、当初の研究課題に対する十分な回答を与えるには至ってはいないという点で、研究目的を十分に達成できたとはいいがたいと考えている。

研究の進め方（研究実施体制及び研究費執行状況）

本研究が行われた期間は、ちょうど新型コロナウイルスが世界に猛威を振るっている期間と重複していたため、あまり出張などに研究費を多く費やすことはなかった。一方で、ZOOM を用いたオンラインでの研究集会などが増えたため、研究費の一部は PC 等をふくむ電子機器の整備にあてがうことになった。また、研究に必要な書籍の購入などにも使用した。

研究成果の科学技術及び社会・経済への波及効果

本研究での成果がすぐに社会や経済に貢献し得るとは考えていないが、本研究で取り扱った凸幾何学の問題は数の幾何学などを通して結晶構造の問題などの現実世界に適合した数理科学的な問題に直結していると考えている。また本研究では相対エントロピーが重要な要素であるが、この概念自体が情報理論や物理的背景を持つことから、本研究がそういった分野にも将来的に貢献することは十分にありうる。

また本研究期間を通して、様々な背景を持つ研究者と問題意識を共有し交流を行った。このような経験は今後の自身の研究意識に大きな影響を与えると考えている。とくに、自身の研究が自身の知らない問題意識と関連しているなどの情報を知ることができた点は非常に今後の研究を豊かなものにしてくれると思われる。

5. 主な研究成果リスト

（1）代表的な論文（原著論文）発表

研究期間累積件数：1件

1. Hiroshi Tsuji, Dilation type inequalities for strongly-convex sets in weighted Riemannian manifolds, Anal. Geom. Metr. Spaces 9 (2021) no. 1 219-253.
本研究では重みつきリーマン多様体上での dilation 不等式を考える。Dilation 不等式は凸幾何学において、Borell の補題として知られていた。本研究では dilation 不等式を一種の等周不等式とみなし、dilation profile という量を導入することによって、重みつきリッチ曲率の下限の下、dilation profile のモデル空間との比較を与えた。また非負の重みつきリッチ曲率の下、dilation profile の比較から得られるいくつかの関数不等式の探索も行った。特に、エントロピーに関連する新しい関数不等式を与えた。

（2）特許出願

研究期間全出願件数：0 件

（3）その他の成果（主要な学会発表、受賞、著作物、プレスリリース等）

著作物

1. Neal Bez, Shohei Nakamura and Hiroshi Tsuji, Stability of hypercontractivity, the logarithmic Sobolev inequality, and Talagrand's cost inequality, arXiv:2201.12478.

2. Shohei Nakamura and Hiroshi Tsuji, Hypercontractivity beyond Nelson's time and its applications to Blaschke--Santaló inequality and inverse Santaló inequality, arXiv:2212.02866.

国際講演

3. Hiroshi Tsuji, Improved log-Sobolev and transportation-cost inequalities under log-concavity and log-convexity, Analysis on metric spaces workshop 2022, 2022/5/23～2022/5/27, OIST

国内講演

4. 辻 寛, Dilation type inequalities for strongly-convex sets in weighted Riemannian manifolds, 第 68 回 幾何学シンポジウム, 2021/8/31～2021/9/3, オンライン開催

5. 辻 寛, Blaschke-Santaló 不等式と inverse Santaló 不等式への熱によるアプローチ, 2022 年度秋季総合分科会, 2022/9/13～2022/9/16, 北海道大学