数理・情報のフロンティア
2020 年度採択研究者

2021 年度
年次報告書

辻 寛

大阪大学 大学院理学研究科
大学院生(博士課程)

量子論基礎にかかる高次元バナッハ空間の幾何学的研究

§1. 研究成果の概要

本年度の研究における成果は，大きく分けて2つである．一つ目は高次元凸幾何学の文脈でよく知られている，ボレルの補題に関する研究であり，二つ目は対数ソボレフ不等式と呼ばれる関数不等式のある種の改良に関する研究である．

まず一つ目のボレルの補題に関する研究について述べる．ボレルの補題とは，凸集合の相似拡大によって確率測度の体積がどのように変化するかを表す不等式を指す．この不等式は対数凹な確率測度との相性が非常によいため，凸幾何学の研究では頻繁に利用される．近年までの研究では，凸集合のかわりにボレル集合を考えた場合の研究が行われており，とくに同様の不等式が，非負のリッチ曲率の仮定のもと，重みつきリーマン多様体上で構成されている．本研究では，この結果をさらに推し進めて，一般のリッチ曲率の下限を備えた重みつきリーマン多様体上での不等式の構成を行った．成果をまとめた論文内では，得られた不等式を dilation 不等式と呼んでいる．本研究ではさらに，dilation 不等式の応用として，非負のリッチ曲率を持つ空間上での逆型ヘルダー不等式の構成，および対数ソボレフ型不等式の構成を行っている．とくに，対数ソボレフ型不等式は従来の dilation 不等式の研究では知られていない帰結である．

二つ目の研究では，ガウス分布に関する対数ソボレフ不等式の安定性についての研究を行った．この研究では，特に共分散と対数ソボレフ不等式の関係を追及した．考える確率測度の共分散が小さいとき，対数ソボレフ不等式が改良されることはすでに知られていたが，共分散が大きい場合には改良できないことも知られていた．本研究では，ある種の“共分散”に対応する概念を考えることによって，“共分散”が大きい場合にも同様に対数ソボレフ不等式をよくできることを明らかにした．さらに本研究では，対数ソボレフ不等式以外のいくつかの関数不等式に対しても対応する改良が可能であることを明らかにした．

【代表的な原著論文情報】

[1] Hiroshi Tsuji, Dilation type inequalities for strongly-convex sets in weighted Riemannian manifolds. *Anal. Geom. Metr. Spaces* 9 (2021), no. 1, 219-253.