公開

研 究 終 了 報 告 書

「写像類群の擬等長分類と機械学習への展開」

研究期間: 2020 年 11 月～2023 年 3 月
研 究 者: 久野 恵理香

1. 研究のねらい

本稿では，向き付け可能曲面をS，向き付け不可能曲面をNで表す．曲面F=S, Nの写像類群Mod(F)とは，F上の微分同相写像のアイソトピー類全体の成す群のことである．F=Sの場合は向きを保つ微分同相写像のみ考える．曲面の写像類群は，2 次元多様体を研究するための道具であると同時に 3,4 次元多様体の研究にも本質的に用いられ，低次元トポロジーにおいて重要な役割を果たしている．曲面が向き付け不可能の場合の研究も古くから続いているが，向き付け不可能曲面特有の性質が困難点となり，向き付け可能曲面と比べ，向き付け不可能曲面の写像類群は未解決な問題が数多く残されている．

群という代数的対象を Cayley グラフという幾何学的対象と見なすことにより，その群の性質を解明するものが幾何学的群論である．幾何学的群論は，低次元トポロジー，作用素環論，群論等が交錯する新しい分野であり，現在様々な方面から精力的に研究され，近年急速に発展している．幾何学的群論における最も大きなテーマの1つが「群の擬等長分類問題」である．2 つの群が擬等長的であるとは，それらに対応する2つのCayleyグラフの間に擬等長写像が存在することである．

本研究のねらいは，曲面の写像類群に関連した群の擬等長分類問題を主軸に，以下の 2 つの目標に絞り研究を進展させることである．

(a) 向き付け不可能曲面の写像類群の直角アルティン部分群とその擬等長性.
(b) 向き付け不可能曲面の写像類群と向き付け可能曲面の写像類群の擬等長性.

2. 研究成果

（1）概要

まず，研究開始当初予定していた2つの研究を以下のように進めることができた．

(a) 向き付け不可能曲面の写像類群の直角アルティン部分群とその擬等長性.

Koberda により曲線グラフを用いて向き付け可能曲面の写像類群の直角アルティン部分群を構成できることがわかった．一方向き付け不可能曲面に対しては通常の曲線グラフを用いてはKoberdaの結果が成り立たないことがわかっていた．片山拓弥氏（学習院大学）と共同研究を行い，双側な曲線に限定した曲線グラフを用いて写像類群の直角アルティン部分群を特徴づけることに成功した．

(b) 向き付け不可能曲面の写像類群と向き付け可能曲面の写像類群の擬等長性.

曲面Fの写像類群をMod(F)とかく．向き付け不可能曲Nと，その二重被覆となる向き付け可能曲面 S に対して，Mod(N)は Mod(S)の部分群となることが知られている．片山拓弥氏（学習院大学）と共同研究を行い，Mod(N)は Mod(S)に擬等長的に埋め込まれることを証明した．

次に，研究開始当初予定していなかったが関連した以下の結果を得た．

（c） 向き付け不可能曲面の非分離曲線グラフの一様双曲性

曲面 F の曲線グラフのフル部分グラフで非分離曲線全体からなるものを非分離曲線グラフ NC(F)と呼ぶ. 向き付け可能曲面Sに対して, Rasmussen が 非分離曲線グラフNC(S)は一様 Gromov 双曲的であることを示した. 私は向き付け不可能曲面 N に対して, NC(N)は一様 Gromov 双曲的であることを証明した.

(d) 向き付け不可能曲面のファイン曲線グラフの一様双曲性

Bowden—Hensel—Webb が, ファイン曲線グラフが一様 Gromov 双曲的であることを示し, さらに種数 1 以上の向き付け可能曲面の微分同相群上に豊富に擬準同型が存在することを証明した. 木村満晃氏（京都大学）と共同研究を行い, 向き付け不可能曲面に対してこれら一連の結果を一般化させた.

（2）詳細

研究開始当初予定していた 2 つの研究(a), (b)を解決することができたので, まずその 2 つの研究の詳細を述べる.

(a) 向き付け不可能曲面の写像類群の直角アルティン部分群とその擬等長性.

写像類群の直角アルティン部分群の研究に着目した. ここで, 直角アルティン群 $A(\Gamma)$とは, 有限グラフΓから定まる, ある有限表示群のことである. 直角アルティン群は仮想ファイバー予想の解決において本質的な役割を果たすことからわかるように, 低次元トポロジーにおいて重要な群である. 向き付け可能曲面の写像類群に対して, その直角アルティン部分群の研究が盛んにおこなわれている. 特に, Koberda が, グラフΓが向き付け可能曲面Sの曲線グラフ C(S)のフル部分グラフであるならばΓの直角アルティン群 $A(\Gamma)$は S の写像類群 Mod(S)の部分群になることを証明した. 一方, 向き付け不可能曲面Nに対しては, 本稿作成者の結果より上記 Koberda の結果が通常の曲線グラフ C(N)に対して一般には成り立たないことが直ちに従う. そこで, 双側な曲線（正則近傍がアニュラスとなる曲線）のみを集めた曲線グラフ Ctwo(N)（双側曲線グラフと呼ぶ）を用いて, 上記 Koberda の結果とその逆が向き付け不可能曲面に対して成り立つか考察し, 以下を得た. なお本研究は片山　拓弥氏（学習院大学）との共同研究である.

<u>定理 1.</u>

向き付け不可能曲面 $N=N_{g,p}$でそのオイラー標数が負のものに対して, $\Gamma < C_{two}(N)$（フル部分グラフの意）ならば $A(\Gamma) < Mod(N)$（部分群の意）が成り立つ.

<u>定理 2.</u>

$N=N_{1,6}, N_{3,3}, N_{5,0}$に対して, $A(\Gamma_0) < Mod(N)$であるが$\Gamma_0 \nless C_{two}(N)$である. 但し, Γ_0は図 1 参照.

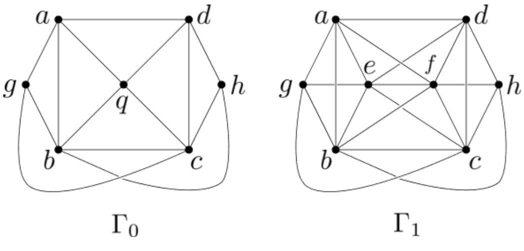

図 1. グラフΓ_0とΓ_1.

(b) 向き付け不可能曲面の写像類群と向き付け可能曲面の写像類群の擬等長性.

写像類群の擬等長分類問題に関連する研究として，これまでに，例えば 2000 年に Masur―Minsky が，向き付け可能曲面 S の本質的部分曲面 S'に対して，Mod(S')から Mod(S)への単射準同型が擬等長的であることを示した．また，2011 年に Broaddus‐‐Farb‐‐Putman と 2017 年に Cohen が，境界成分数が高々1 の向き付け可能曲面 S に対して，そのトレリ群から Mod(S)への単射準同型が擬等長的でないことを示し，2017 年に Kuno‐‐Omori が境界成分数 2 以上の向き付け可能曲面に対してそのトレリ群から Mod(S)への単射準同型が擬等長的でないことを示した．このような研究動向の中，本研究では向き付け二重被覆 j: S→N から誘導される写像類群の間の単射準同型 ι: Mod(N)→Mod(S)に着目して以下を得た．本研究は学習院大学の片山拓弥氏との共同研究である．

<u>定理 3.</u>

$N=N_{g,p}^{b}$ とする．ただし，$(g,p,b)\neq(2,0,0)$ である． j : S→N を N の二重被覆写像とする．よって，$S=S_{g-1,2p}^{2b}$ である．このとき，単射準同型 ι : Mod(N)→Mod(S) は擬等長埋め込みである．

次に，研究開始当初予定していなかったが，関連した研究として得られた 2 つの結果について説明する．

(c) 向き付け不可能曲面の非分離曲線グラフの一様双曲性

曲面 F の非分離曲線グラフ NC(F)とは，通常の曲線グラフ C(F)のフル部分グラフであって，非分離曲線のアイソトピー類全体から構成されるもののことである．幾何学的群論において重要な概念の一つに Gromov 双曲性という，擬等長写像により不変な性質がある．Masur‐‐Minsky が，向き付け可能曲面 S の曲線グラフ C(S)は Gromov 双曲的であることを初めて証明した．その後，C(S)の S の位相型に依らない（つまり，一様な）双曲性定数がさまざまな方法により求められた．さらに，Rasmussen が NC(S)は一様双曲的であることを示した．向き付け不可能曲面 N の曲線グラフに対しては，Bestvina‐‐Fujiwara によって C(N)は Gromov 双曲的であることが証明され，本稿作成者より，一様な双曲性定数が求められた．このような研究動向の中，以下を証明した．

<u>定理 4.</u>

N を種数 g の有限型向き付け不可能曲面とする．このとき，その非分離曲線グラフ NC(N)は一様双曲的である．但し，g=1,2 の場合に NC(N)の辺の定義を部分的に改変している．

(d) 向き付け不可能曲面のファイン曲線グラフの一様双曲性

曲面 F のファイン曲線グラフ C†(F)とは，本質的な単純閉曲線を頂点とし，2 つの頂点はそれらに対応する曲線が交わらないときに辺で結ばれる，と定めることによってできるグラフのことである．Bowden‐‐Hensel‐‐Webb は，Rasmussen の結果「非分離曲線グラフ NC(S)は一様双曲的である」を応用して，向き付け可能閉曲面 S に対して，そのファイン曲線グラフ C†(S)が一様双曲的であることを証明した．本研究で向き付け不可能曲面に対して同様の理論が展開できないかということを考え以下を得た．本研究は木村満晃氏（京都大学）との共同研究である．

<u>定理 5.</u>

N を種数 $g \geqq 2$ の向き付け不可能閉曲面とする．このとき，そのファイン曲線グラフ $C^\dagger(N)$は一様双曲的である．但し，$g=2$ の場合に $C^\dagger(N)$の辺の定義を部分的に改変している．

3．今後の展開

ACT-X 研究期間内に向き付け二重被覆から誘導される写像類群間の単射準同型の擬等長埋め込み性がわかるなど，写像類群に関連した擬等長分類という研究課題を進展させることができた．今後も，写像類群に関連した群や空間の擬等長分類というテーマを主軸に下記研究課題に取り組んでいきたい．今後 5 年～10 年で解決したい問題としている．

1．マルチ曲線グラフの Gromov 双曲性

Masur--Minsky が向き付け可能曲面の曲線グラフ C(S)は Gromov 双曲的であることを示した．また，Brock--Farb により，向き付け可能曲面のパンツグラフは Gromov 双曲的でないことが示された．k-マルチ曲線グラフ（各頂点が k 本のマルチ曲線であるグラフ）が Erlandsson--Fanoni により定義されている．通常の曲線グラフは k=1 の k-マルチ曲線グラフ，パンツグラフは k が曲面の複雑度のときの k-マルチ曲線グラフと思える．任意の k に対して，その k-マルチ曲線グラフが Gromov 双曲的であるかという問題を解決する．そして，どの k まで Gromov 双曲的であり，どの k から Gromov 双曲的でなくなるのかという問題を解き明かす．

2．マーキング複体と写像類群の擬等長性の解明

向き付け可能曲面に対して，曲面のパンツ分解を与えるマルチ曲線に，その成分となる曲線と横断的に高々2 回交わる曲線を加えたものをマーキングという（パンツグラフの頂点に更に曲線を付け加えたものとも思える）．Masur--Minsky により，向き付け可能曲面に対して，各頂点をマーキングとしたマーキング複体が定義され，そしてマーキング複体はその写像類群と擬等長的であることが解明された．写像類群と擬等長的になる空間はわずかしか知られていなく，マーキング複体は非常に重要な複体である．一方，向き付け不可能曲面においてマーキング複体は定義されておらず，更に向き付け不可能曲面の写像類群と擬等長的となる空間や群は現在知られていない．マーキング複体と類似の複体を向き付け不可能曲面に対して考えることは，写像類群を擬等長分類の観点から探求するにあたり意味がある．そこで，まず向き付け不可能曲面のパンツグラフを定義しその連結性等の諸性質を調べ，その後マーキング複体と類似の複体を向き付け不可能曲面に対して定義し，向き付け不可能曲面の写像類群と擬等長的となる複体を構成することを目指す．

4．自己評価

研究目標の達成状況は，研究開始当初の予定通りおおむね順調に進んだと言える．特に向き付け二重被覆から誘導される写像類群間の単射準同型の擬等長埋め込み性に関する研究は，挑戦的な研究目標として当初掲げていたのだが，2020 年 9 月にプレプリントサーバーarXiv において Durham―Minsky―Sisto と Haettel―Hoda―Petyt が独立に発表した，向き付け可能曲面 S の写像類群 Mod(S)および拡張写像類群 Mod±(S) は準双曲的（semihyperbolic）であるという結果が鍵となり ACT-X 研究期間内に解決することができた．さらに，研究開始当初には予想していなかったファイン曲線グラフの結果も得ることができ，

ACT-X 研究期間内に予定以上の成果があった. ACT-X 研究費は当初の計画通り 2000 千円を執行した. 老朽化した iPad を買い替え, ポータブル PC (surface) を得られたこと, そして打合せや研究集会参加・講演に必要な旅費が得られたことで, 他研究者と交流しながら研究を進められたことが研究遂行のために大いに役に立った. 純粋数学分野の研究としての波及効果としては以下のようなことが考えられる.

研究 a に関しては, これまで向き付け不可能曲面の写像類群の直角アルティン部分群の研究がほとんどなかった中で, 曲線グラフを用いて写像類群の直角アルティン部分群の特徴付けを1つ与えることができ, 更にその単射準同型は擬等長埋め込みとなることまでわかった. 本研究で得られた知見を今後向き付け不可能曲面の写像類群の直角アルティン部分群の研究に生かしていきたい.

研究 b に関しては, 向き付け可能曲面の写像類群と向き付け不可能曲面の写像類群の間のある単射準同型が擬等長埋め込み写像であることがわかった. 本研究を発展させ, 任意の曲面の組 F, F' の写像類群間に擬等長埋め込み写像があるのかなどを考えていきたい.

研究 c, d に関しては, ここ数年でファイン曲線グラフを用いて, (アイソトピー類をとらない) 同相群や微分同相群を調べる研究が進んできているの. 本研究により, 向き付け不可能曲面に対してもその同相群や微分同相群について考察するための土台を作ることができたと言える.

5. 主な研究成果リスト

(1) 代表的な論文(原著論文)発表

研究期間累積件数:4件

1. T. Katayama and E. Kuno, The mapping class group of a nonorientable surface is quasi-isometrically embedded in the mapping class group of the orientation double cover, arXiv:2101.11839 [math.GT].
向き付け不可能曲 N と, その二重被覆となる向き付け可能曲面 S に対して, Mod(N)は Mod(S)の部分群である. これまでに向き付け可能曲面の写像類群に対して, その部分群の埋め込みが擬等長であるか否かという問題がいくつか分かりつつあった. 本論文で, Mod(N)は Mod(S)に擬等長的に埋め込まれることを証明した.
2. T. Katayama and E. Kuno, Right-angled Artin groups and curve graphs of nonorientable surfaces, arXiv:2105.07559 [math.GT].
Koberda により, 曲線グラフを用いて写像類群の直角アルティン部分群を構成できることがわかった. 一方, 向き付け不可能曲面に対しては, 通常の曲線グラフを用いては Koberda の結果が成り立たないことがわかっていた. これは N 上に単側な曲線が取れることが要因だった. 本論文で, 双側な曲線に限定した曲線グラフの部分グラフを用いて写像類群の直角アルティン部分群を構成することに成功した.
3. M. Kimura and E. Kuno, Quasimorphisms on nonorientable surface diffeomorphism groups, arXiv:2111.05540 [math.GT]
Bowden-Hensel-Webb が, ファイン曲線グラフ(アイソトピー類を取らない曲線を頂点に対

応させた曲線グラフ)が一様 Gromov 双曲的であることを示し, さらに種数 1 以上の向き付け可能曲面の微分同相群上に豊富に擬準同型が存在することを証明した. 私たちは向き付け不可能曲面に対してこれら一連の結果を一般化させた.

(2)特許出願

研究期間全出願件数:0 件(特許公開前のものも含む)

(3)その他の成果(主要な学会発表、受賞、著作物、プレスリリース等)

主要な学会発表

[1] 日本数学会 2021 年度秋季総合分科会,「向き付け二重被覆に誘導される写像類群間の単射準同型の擬等長埋め込み性 (1)」, オンライン, 2021 年 9 月 14 日.

[2] Riemann surfaces and related topics, Fine curve graphs of nonorientable surfaces and the Gromov hyperbolicity, オンライン, 2022 年 2 月 15 日.

[3] Intelligence of Low-dimensional Topology, Gromov hyperbolicity of fine curve graphs for nonorientable surfaces, RIMS・ハイブリッド, 2022 年 5 月 25 日.

[4] Long-distance Seminar on Geometric Group Theory in Mexico, A quasi-isometric embedding between mapping class groups, Zoom, 17 November, 2022.

受賞

[1] 2021 年 11 月 29 日, ICM2022 コワレフスカヤ基金援助.