

数理・情報のフロンティア  
2019 年度採択研究代表者

2020 年度 年次報告書
------------------

宇田 智紀

東北大学 材料科学高等研究所  
助教

レーブグラフの順序定式化の数理とデータ解析

## § 1. 研究成果の概要

本研究は、画像データの位相的特徴抽出に応用できる新たなトポロジカルデータ解析手法であるレーブ順序法の数理的な基礎の確立を目指すものである。所与のデータを軸に沿って連続的に輪切りにしていく時の様子(トポロジカルな繋がり方)をグラフ構造で表したものがレーブグラフであり、これを離散データのみから復元するのがレーブ順序法である。二種類のパーシステントホモロジーを組み合わせて順序を構築する点が特徴で、構成方法から従来のトポロジカルデータ解析と同様の安定性定理(入力ノイズに対する出力の堅牢性)の成立が期待された。

当該年度は、昨年度の考察を基にしてレーブ順序法の安定性を証明した。具体的には、入力グリッド  $X$  上のスカラー関数  $f$  に対するレーブ順序  $R(X, f)$  について  $d(R(X, f), R(X, g)) \leq \|f - g\|$  が成り立つことを証明した。ここで  $d$  は Silva らによる位相空間の圏での interleaving 距離を半順序空間の圏で同様に定義したものである。証明では、「順序が木構造を持つ」ことの特徴付けの一般化が鍵となる。距離の定義には平滑化を用いるが、平滑化した半順序空間はもはや有限集合でなく、グラフ理論における木の定義はそのままでは意味を為さない。そこで、順序構造から自然に定められるある代数構造に着目し、これを順序の基本群と呼ぶことにした。単連結性の類推で順序の基本群が自明という仮定の下で、平滑化は再び自明な基本群を持つ。このことから、二つのレーブ順序の間の準同型を構成でき、安定性が証明できた。また、レーブ順序法を単連結空間上の連続関数に適用する場合には Silva らと同様の方法で準同型が構成できるが、基本群に着目する方法はその自然な離散化となっており、数学的にも非常に興味深い理論となっている。