

# 研究終了報告書

## 「幾何学的群論とマルコフ連鎖の計算論的研究」

研究期間：2019年10月～2022年3月

研究者：田中 亮吉

### 1. 研究のねらい

幾何学的群論(特に離散群論)の手法を用いて、理論コンピュータ科学と強い関連を持つマルコフ連鎖の研究を行う。無限離散群の研究には距離空間の幾何学や確率論が自然に用いられている。その中には理論コンピュータ科学に起源を持つ研究も非常に多い。本研究では、幾何学的群論の高度な技法を用いて理論コンピュータ科学に動機付けられた問題に挑戦する。特に有限状態マルコフ連鎖の混合時間という確率論において基本的な問題を扱う。有限状態マルコフ連鎖はアルゴリズムの設計に用いられており、混合時間の評価はアルゴリズムの効率を理論的に保証するが、その評価は多くの場合数学的に高度な手法が用いられる。またその研究で得られた知見を幾何学的群論の研究にフィードバックすることも視野に入れている。今後この方向はより深まっていくように思われるので、双方向的研究を視野に入れて具体的な研究を行っていくのが目的である。

### 2. 研究成果

#### (1) 概要

本研究の目的は幾何学的群論の高度な手法を生かして理論コンピュータ科学に現れるマルコフ連鎖の問題に挑戦することである。私は幾何学的群論と離散確率論の研究を行ってきた。それは主に無限離散群上のランダムウォークに関わるものである。離散群では主に従順群と非従順群の Gromov 双曲群という 2 つの異なるクラスを調べているが、従順群の粗いスケールの幾何学において距離空間の Hilbert 空間への埋め込み問題や Gromov 双曲群のオートマティック構造をベースにした記号力学系の応用などを研究してきた。より最近では有限状態マルコフ連鎖のクラスの 1 つに現れる product replacement algorithm (chain)(以下 PRC と略記)という、与えられた有限群の元をほぼ一様にサンプリングするマルコフ連鎖について研究を行っている。この PRC は 90 年代に計算論的群論の研究者により導入され、GAP などのパッケージに内装されており経験的に“良い”アルゴリズムを与えていると考えられているが、その理論的な裏付けはまだ存在しない。純粋に確率論的な立場からもこのマルコフ連鎖の混合時間についてはスペクトラルギャップやより高度な関数解析的な技法を援用して研究がなされてきたが、最終的に任意の固定された有限群に対して混合時間の最適な評価(Diaconis と Saloff-Coste の予想)とカットオフ現象の確立を証明することができた(Yuval Peres と Alex Zhai との共同研究)。またこのマルコフ連鎖は PRC だけでなく統計力学における相互作用粒子系や行列群上のマルコフ連鎖を用いた新しいタイプの public-key authentication protocol の設計(Rivest と Sotiraki により 2016 年に提案されたもの)にも用いられている。我々の研究によりサイズの固定された有限群についての PRC についての混合時間は解明されているが、これらの関連する問題については、群のサイズが系のサイズとともに大きくなるものや、定義されているグラフに制約が加わっていきたりするもので、解析には新しいアイデアが必要である。その 1 つとして有力あるいは強く関連する手法が(有限生成)無限群についての強いスペクトラルギャップを持つ群(Kazhdan の Property (T)を持つ群)の解析である。実際有限体上の行列群の関連するマルコフ連鎖の現在最良の評価は、その群



をカバーする無限行列群の Property (T)を用いて与えられている(Kassabov(2005)による)。また近年無限離散群論における Property (T)についての未解決問題が、計算機を用いて厳密証明されるということが起きており、この方向は離散群論においても今後深まっていくと考えられる。本研究はこのような高度な幾何学的群論の手法との関連において、理論コンピュータ科学における確率論の問題に挑戦し、双方向に新しい研究の方向性をもたすのが目的である。

## (2) 詳細

具体的な理論コンピュータ科学と深く関わる有限状態マルコフ連鎖の混合時間の研究として

1. David Aldous が 90 年代に提起した未解決問題の 1 つである一般のグラフ上で定義された product replacement chain (PRC)の混合時間の評価

2. Yuval Peres (2004)による未解決問題である、すべての頂点推移的エキスパンダーグラフ族上の単純ランダムウォークにはカットオフ現象が起きるか、という問題への具体的な寄与を達成目標としていた。

また本研究を通して理論コンピュータ科学の有力な研究者とつながりを得て、基本的かつ重要な数学的問題を見いだして自身の研究に取り込んでいくということがもう1つの(私にとって重要な)達成目標であった。そのため場合によっては新しく見いだした問題に挑戦していくことも考えていた。

1. について、Aldous は当時知られている技法では解けそうにないと考えられる問題の一群を未解決問題として提出した。この問題はその 1 つであり現在でも大部分が完全な解決に至っていない。我々の論文は完全グラフの場合に相当するものである。しかし、元々の Aldous が提起した問題では PRC を定義するグラフの族はより一般的なものである。この問題は有限群の元を一様にサンプルするという応用以外にも様々な問題とつながっている上に、離散円周上やグリッド上では必要な技術も含め真にグラフに依存して変わることが予想され、数学的困難を乗り越えるのに必要とされる道具は確率論内部のものでは十分でない。この場合では未だ厳密な証明は与えられておらず、混合時間のシャープな評価(あるいはより強くカットオフ現象の確立)は重要だと考えられる。

2. について、Lubetzky と Peres (2016)によりすべての Ramanujan グラフ族(エキスパンダーグラフ族の中でスペクトル論的に最も高級な族)に対してカットオフ現象が確立された以外、一部の例外を除いてこの予想は(大いに)未解決である。実際マルコフ連鎖の研究でエキスパンダーグラフ族が現れるのは基本的であり、それはこれらのグラフ族が混合時間の最適なオーダーを実現する重要なクラスをなしているからである。マルコフ連鎖のカットオフ現象は、混合時間の詳細な評価という以上にある特定の時間における急激な混合効果を示すもので、その確立の動機も主に理論コンピュータ科学にある。つまりその時刻までアルゴリズムを走らせることが必要というだけでなく、それ以上そのアルゴリズムを走らせることは余剰であることも示すことになるからである。またカットオフ現象の確立は一般に混合時間の最適な評価以上にそのマルコフ連鎖についての深い理解が要求され、多くの場合非常に挑戦的である。エキスパンダーグラフ族の具体的な構成自体は理論コンピュータ科学と幾何学的群論の有効なつながりを示す古典的な例であるが、この未解決問題も幾何学的群論や確率論だけでなく Kazhdan の Property (T)が要求する無限次元表現論とも深く関わるものである。この予想について Ramanujan グラフ族以外の対称性の高いエキスパンダーのある特定の族において確立することは、既存の手法以

上のアイデアを必要とすると予想されるのでそれだけで価値のあるものである。実際  $SL(3, \mathbb{Z})$  は Property (T) を持ちこの群に付随するエキスパンダー族という最も基本的と考えられる例でも(対応するユニタリ表現が Ramanujan かどうか不明なため)予想の確立はなされていない。この問題は Property (T) というそれ自体十分非自明な性質だけでは解決しきれない種類の問題である。私は連続ヴァージョンの問題(これはブラウン運動についての問題であり理論コンピュータ科学と直接関連しないが、予想の確立はより容易と考えられる)も含めてこの問題に取り組んでいる。また Gromov 双曲群上のランダムウォークの研究での経験を生かして、双曲幾何のアイデアを援用して予想の厳密証明が可能な新しいクラスを見いだす試みも行っている。この問題についてはエキスパンダー族を構成しそれについてカットオフ現象を調べるという方針を取り、現在(理論コンピュータ科学でも興味深いと思われる)エキスパンダー族の具体的構成について研究を行い、一定の成果が得られてきた状況である。

### 3. 今後の展開

数学者と理論コンピュータ科学者の双方向的研究が具体的かつ有効に行われている例として私が把握しているのは、北米(特にワシントン大学(シアトル)における理論コンピュータ科学と確率論のグループ)とフランス(主に幾何学的群論のグループにおける共同研究者を通じて)である。私が自分の独自の数学的バックグラウンド(幾何学的群論と確率論)を生かして日本国内の有力な理論コンピュータ科学のグループと接点を持ちたいというのが、この研究計画における主要な動機であった。アメリカやフランスの研究者との共同研究者は刺激的で私の研究にとって非常に重要であるが、一方で日本国内において独自のネットワークを構築して自分なりの研究を行っていきたく強く思うようになったという経緯がある。より長期的な視点に立って自分が将来国内をベースに研究者として研究を続けていこうと思ったとき、同世代の異なる分野の有力な研究者とつながりが得られるような研究にチャレンジしていきたいというのが真に目指すところであった。本研究は当該分野における私のそのような長期的な方向性にも強く動機付けされたものであった。これに関してこの2年半の間に国内のネットワーク形成に関わったのではないかという手ごたえを感じている。今後は2年半ではなく10年単位の長いスパンで腰を据えて物事を考えていきたい。

### 4. 自己評価

本研究提案は数学の立場から、おそらく限られた専門の数学者にのみアクセス可能な高度な数学を用いて理論コンピュータ科学の問題に関わろうとするものであり、同時に幾何学的群論の研究にもフィードバックを目指している。そのことで幾何学的群論の研究に新しい研究者(実際かなり多くの数学者が潜在的に関わっていると考えられる)が参入する良い動機を提供したいという望みも持っていた。また国内での有力な理論コンピュータ科学と数学者の接点を構築することで、理論コンピュータ科学における問題を数学における基本的な重要な問題として解決していくということが自然に起きるような状況を近い将来国内において作っていきたく真剣に考えていた。こうした目標の実現に向け具体的に一步踏み込むことができたのは自分にとってとても大きな糧になったと考えている。ここで得られた経験をしっかりと育てていきたいと思っている。

### 5. 主な研究成果リスト



(1) 代表的な論文(原著論文)発表

研究期間累積件数:3件

1. Peres Y., Tanaka R., Zhai A., Cutoff for product replacement on finite groups, Probability Theory and Related Fields (2020), 177, no.3-4, 823-853
すべての有限群について, product replacement algorithm (chain) が配位空間のサイズ $n \rightarrow \infty$ の極限で total-variation distance の意味でカットオフ現象を起こすことを証明した.
2. Tanaka, R., Topological flows for hyperbolic groups, Ergodic Theory and Dynamical Systems (2021), 41(11), 3474-3520.
すべての非初等的 Gromov 双曲群において Bowen-Margulis カレント族がすべての不変 Radon 測度のなかで最大の Hausdorff 次元を持つ唯一の測度族であることを証明した.
3. Kajigaya T., Tanaka R., Uniformizing surfaces via discrete harmonic maps, Annales Henri Lebesgue (2021), Volume 4, pp. 1767-1807.
すべての閉双曲曲面とその曲面を filling する任意の重み付き有限グラフが与えられたとき, 埋め込み写像のディリクレエネルギーがすべての双曲計量において最小となるような双曲計量がその曲面に存在することを証明した.

(2) 特許出願

該当なし.

研究期間全出願件数:0件(特許公開前のもも含む)

(3) その他の成果(主要な学会発表、受賞、著作物、プレスリリース等)

1. “Topological flows for hyperbolic groups” Ryokichi Tanaka, Geometric Group Theory in East Asia (口頭発表; 2020年12月18日) 審査無
2. “The Manhattan curve and rough similarity rigidity” Ryokichi Tanaka, Pacific Dynamics Seminar (口頭発表; 2021年5月21日) 審査無
3. “The Manhattan curve and rough similarity rigidity” Ryokichi Tanaka, Ohio State University, Ergodic Theory Seminar (口頭発表; 2021年10月8日) 審査無
4. “Glauber-Exclusion dynamics: rapid mixing regime” 田中亮吉, The 19th Symposium Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems (online) (口頭発表; 2021年12月7日) 審査無