公開

（事後評価・研究者用）

研　究　報　告　書

「組合せ最適化と線形代数の交点における理論と応用の探求」

研究期間：　2020 年 4 月～2022 年 3 月
研究者番号：　50244
研　究　者：　大城　泰平

1．　研究のねらい

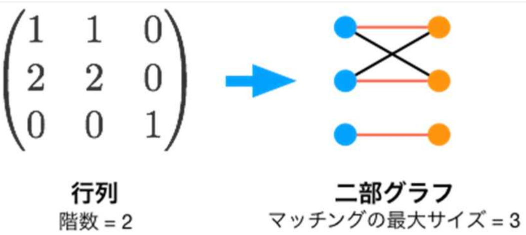
組合せ最適化とは、複数の選択肢の中から最もよいものを探す問題の枠組みであり、一部の問題は線形代数学における行列理論を経由して効率的に解くことができる。また逆に、ある種の線形代数学の問題を組合せ最適化の道具立てを用いて解く手法も知られている。これらの「組合せ最適化問題」と「線形代数の問題」の対応は、理論計算機科学や数理工学の分野において古くから研究が行われており、理論的に興味深いだけでなく、動的システム解析における実問題への応用ももつ。

本研究課題では、この両分野の交点に位置する、代数的組合せ最適化理論のさらなる深化を目指す。特に、行列式を用いた組合せ構造の数え上げ技術の統一、変数を含む行列の階数計算手法の代数的一般化、および動的システム解析手法への組合せ最適化理論の応用に取り組み、理論と応用の両面からの発展を探求する。

2．　研究成果

（1）概要

選択肢の中から一番よいものを探す「組合せ最適化」理論と、高次元の真っ直ぐな空間を扱う「線形代数学」の間に関係があるということは、古くから知られてきた。例えば、行列の階数は、その行列から作られる二部グラフがもつマッチングの最大サイズで上から抑えられる（右図）。



また、Kirchhoff の行列木定理は、グラフの中に存在する全域木の個数を、行列式を用いて数え上げる美しい定理である。グラフにおいて全域木がもつ性質と、行列の列ベクトル集合がもつ線形独立性は、マトロイドという構造として共通して抽象化される。今日では、マトロイドは組合せ最適化における基本的な考察対象の一つであり、工学における幅広い応用ももつ。

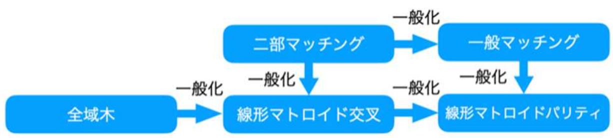
前述の例では行列から二部グラフを構成したが、逆に、二部グラフからそのマッチングの最大サイズと階数が一致するような行列を構成することもできる。二部マッチング問題の一般化である一般マッチング問題や、線形マトロイド交叉問題・線形マトロイドパリティ問題といったマトロイド上の問題でも同様の行列表現が知られている。ここで構成する行列はいずれも線形記号行列とよばれる、各要素に多変数一次式をもつ行列であり、その階数は変数に乱数を代入することで効率的に計算できる。

一般の線形記号行列の階数を計算する問題は Edmonds 問題とよばれる。この問題が決定

的（乱数を用いずに）多項式時間可解であるかどうかは回路計算量理論における重要な未解決問題である。一方、各変数を積に関して非可換だとみなした場合の階数を計算する非可換 Edmonds 問題は決定的多項式時間可解であるということが近年明らかとなった。
非可換性は工学においては微分および差分作用素の形で現れる。線形時変システムを記述する伝達関数行列は微分・差分作用素の多項式を各要素にもつ行列であるため、非可換性をもつ行列の解析は線形システムの解析に応用可能である。一方、実際の工学における動的システムのモデリングにおいては、非線形方程式が必要となることも多い。
本研究では、組合せ最適化問題の行列表現、線形記号行列の非可換階数、そして動的システム解析を題材にした三つの研究テーマ「数え上げ可能な組合せ構造の統一化」「分割的離散付値斜体における Dieudonné 行列式の付値計算」「非線形微分代数方程式の構造修正法」に取り組み、組合せ最適化と線形代数の両面を横断する理論の深化と応用技術の開発を行った。

（２）詳細

研究テーマ A「数え上げ可能な組合せ構造の統一化」
組合せ最適化問題の解の数え上げは、解のランダムサンプリングにつながる重要な技術の一つである。しかし、解の個数は一般に入力の指数個となるため、解を一つずつ列挙し数え上げる手法は実用的でない。特殊な組合せ最適化問題については、その解の個数を行列式計算によって計算できるということが知られており、その一例が Kirchhoff の行列木定理である。同様に平面的グラフのマッチングは、各辺をうまく向きづけすることで得られる行列の行列式を計算することで数え上げ可能である。これらの手法の原理は、Edmonds 問題の観点からは、線形記号行列の各変数に対して定数を非常にうまく選択し代入することで、行列式の展開時の各項の符号を一致させているものとみなすことができる。この解釈を最初に与えたのは Webb(2004)の博士論文であり、同論文では全域木と二部マッチングの数え上げを線形マトロイド交叉に共通して拡張した「パフィアンペア」という構造を提案した。
本研究テーマでは、パフィアンペアをさらに線形マトロイドパリティ問題の世界に拡張することで「パフィアンパリティ」という構造を新たに提案した（右図：各問題の関係）。



パフィアンパリティはパフィアンペアと一般グラフのマッチングの数え上げの共通の一般化であり、他にも 3-一様 3-ハイパーグラフのハイパー全域木や無向グラフの最短点素 STU パスの数え上げを特殊ケースとして含む。このように、パフィアンパリティは効率的に数え上げ可能な様々な組合せ構造を同時に一般化し、それらが効率的に数え上げ可能である説明を与える。
さらに、本研究では重み付きの問題設定において、パフィアンパリティの最小重みの解を数え上げる決定的多項式時間アルゴリズムも与えた。この結果は Broder-Mayr (1994)および Hayashi-Iwata (2017)によって与えられた、最小重み全域木や有効全域木の数え上げアルゴリズムの一般化である。
本研究成果は組合せ最適化の国際会議 The 22nd Conference on Integer Programming and

Combinatorial Optimization (IPCO '21)に採択され、口頭発表を行った(5. 主な研究成果リスト(1)2)。

研究テーマ B「分割的離散付値斜体における Dieudonné 行列式の付値計算」

重みつき組合せ最適化問題とは、選択肢を構成する各要素に重みとよばれる実数値が付随する設定において重みの和を最大化する選択肢を求める問題である。重みなし問題が通常の(重みなし)Edmonds 問題に帰着される一方で、重みつき問題は重みつき Edmonds 問題(線形多項式行列とよばれる行列の行列式の次数計算)に帰着される。この重みつき Edmonds 問題は、重みなし問題の場合と同様に可換・非可換の問題設定がそれぞれ考えられ、重みつき非可換 Edmonds 問題は効率的に解けるということが Hirai (2019)や Hirai-Ikeda (2020)によって示されている。

本研究では、可換・非可換どちらの場合においても、重みつき Edmonds 問題が重みなし Edmonds 問題に決定的疑多項式時間帰着可能であるということを示した。これは Moriyama-Murota (2013) によって与えられた、多項式行列の拡大行列の階数と小行列式の次数の Legendre 共役性の結果の拡張に基づく。この結果は基礎体が有理数体の場合に計算途中のビット長を多項式長に抑える初めてのアルゴリズムである。本結果は理論計算機科学の国際会議 The 47th International Colloquium on Automata, Languages and Programming (ICALP '20)に採択され、口頭発表を行った(5. 主な研究成果リスト(1)1)。

また、本アルゴリズムおよび Murota(1995)による組合せ緩和法が本質的に必要とする条件を抽出し、重みつき Edmonds 問題の代数的一般化を行った。この問題設定は「分割的離散付値斜体とよばれる代数構造上の行列に対し、その Dieudonné 行列式(通常の行列式の斜体への拡張)の付値を計算する」という抽象的なものであるが、重みつき Edmonds 問題のほか、微分・差分演算子の多項式を要素にもつ行列(歪多項式行列)の Dieudonné 行列式の次数計算を特殊例として含む。歪多項式行列の Dieudonné 行列式の次数は、対応する線形微分・差分方程式系の解空間の自由度(解を唯一に定めるために与えなければならない初期値の数)と一致するため、本アルゴリズムは線形システムの自由度解析に応用することができる。この結果は代数計算の国際会議 The 46th International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC '21)に採択され、口頭発表を行った(5. 主な研究成果リスト(1)3)。

研究テーマ C「非線形微分代数方程式の構造修正法」

微分代数方程式(DAE)は微分方程式と代数方程式の要素を併せ持つ方程式であり、動的システムの解析に広く用いられる。DAE の数値的な解きにくさは、指数とよばれる特性量によって特徴づけられ、DAE で記述された動的システムの高精度な数値計算を行うためには、与えられた DAE を低指数の DAE に変換する操作が重要である。しかし、多くの DAE ソルバで採用されている Mattsson-Söderlind (1993)の指数減少法は SA-amenable という性質をもつ DAE のみに適用可能である。回路解析における修正節点解析法は SA-amenable でない DAE を出力することもあり、そのような DAE に対しては精度の良い数値解を得ることが困難であった。

　本研究では、SA-amenable でない非線形 DAE を SA-amenable な DAE に修正する手法を提案した。本手法の肝は Murota(1995)による組合せ緩和法を、記号計算システムと融合することで非線形方程式系へ適用範囲を拡張した点にある。提案手法を実際の平面ロボットアーム・リング変調器・トランジスタ増幅器を記述する SA-amenable でない DAE に適用し、SA-amenable な DAE に変形でき、また指数減少法を通して数値解を計算できるということを確かめた。この結果は数値計算の論文誌 IMA Journal of Numerical Analysis への採録が決定した（5. 主な研究成果リスト（1）4）。

3.　今後の展開

本研究における各研究テーマの成果に対し、下記のような様々な学術的展開が考えられる。

研究テーマ A　本研究で新たに定義した構造は、効率的に数え上げ可能な多くの組合せ構造の統一的理解を与える枠組である。抽象的概念を適切に定義することは、定義から定理を生み出す数学という学問にとって最も重要なステップである。今後、今まで各組合せ構造に個別に与えられてきた議論を統一する様々な後続研究が生まれることが期待される。

研究テーマＢ　本研究は組合せ最適化・理論計算機科学・代数計算・科学計算の四分野にまたがるものであるため、それぞれの学問分野における展開について述べる。組合せ最適化においては、Legendre 共役性という最適化において重要な性質が今回の代数的な問題設定でも現れたという点で興味深く、代数構造と組合せ構造のつながりが今後も明らかになっていくことが期待される。理論計算機科学においては、重みつき Edmonds 問題と重みなし Edmonds 問題の間の関係を明らかにした本研究が、重みなし可換 Edmonds 問題の決定的多項式時間可解性を解決する緒となれば望ましい。代数計算においては、歪多項式行列の行列式の次数計算に組合せ的手法を適用した初めての技法を与えた。このような組合せ的技法は代数計算の分野においてまだまだメジャーとは言い難いものであり、他の代数計算手法に対する今後の発展が期待される。科学計算においては、線形微分・差分方程式系の自由度の効率的な解析手法を設計した。特に、差分方程式系の自由度の行列式の次数を用いた特徴づけを陽に与えたのも本研究結果が初めてであり、実際の線形システム解析への応用が期待される。

研究テーマ C　本研究で与えた手法は動的システムの高精度なシミュレーションを行うための基礎技術の一つである。提案手法を実験的に実装したソースコードは公開しているものの、実際のものづくりの現場にそのまま利用可能な質ではない。今後既存のシミュレーションソフトウェアに提案手法の実装が追加・保守され広く使われることとなれば、動的システムのシミュレーションの世界においてインパクトを与えることが期待される。

４． 自己評価

- **研究目的の達成状況**

  本研究課題「組合せ最適化と線形代数の交点における理論と応用の探求」は、当初の研究計画から一部修正を行った点もあるものの、組合せ最適化・理論計算機科学・代数計算・数値計算の 4 分野にまがたる 3 本の論文の国際会議採択と 1 本の論文誌採択につながり、理論・応用の両面においておおむね達成したものと考えている。会議に採択された論文は完全版を論文誌に投稿中であり、今後も成果物としての論文リストが増えていくことが期待される。

- **研究の進め方（研究実施体制及び研究費執行状況）**

  本研究は個人型の理論研究であるため、実際の研究および論文執筆は共著論文（5. 主な研究成果リスト（1）2）を除き代表研究者のみで実施した。研究費は主に書籍の購入と計算機環境の構築に利用した。特に、高性能な数値計算用計算機を導入し、成立が予想される定理の反例探索に役立てた。COVID-19 の影響により研究計画時に予定していた国内外の出張をほぼ全て取りやめることとなったことが心残りである。

- **研究成果の科学技術及び学術・産業・社会・文化への波及効果**

  「今後の展開」において前述したように、本研究成果は、組合せ最適化、理論計算機科学、代数計算、科学計算において理論・応用の両面から様々な学術的展開が考えられる。理論研究は、その成果が産業や社会へただちに還元されるような性質をもつものではないが、新たな価値を創造する種となるだろう。応用研究の側面では、シミュレーションという現代の産業を支える基礎技術の信頼性を補強する、地味ながら確かな価値を生み出せたと考えている。

- **研究課題の独創性・挑戦性**

  組合せ最適化と線形代数を基軸とし、情報科学における4つの分野をつなぐ本研究課題の独創性および挑戦性は十分に認められるものであると考える。

５． 主な研究成果リスト

（1）論文（原著論文）発表

1. Taihei Oki. On Solving (Non)commutative Weighted Edmonds’ Problem. In *Proceedings of the 47th International Colloquium on Automata, Languages and Programming (ICALP ’20)*, LIPIcs 168, pp. 89:1–89:14, 2020.
2. Kazuki Matoya and Taihei Oki. Pfaffian pairs and parities: counting on linear matroid intersection and parity problems. In *Proceedings of the 22nd Conference on Integer Programming and Combinatorial Optimization (IPCO ’21)*, LNCS 12707, pp. 223–237, 2021.
3. Taihei Oki. Computing valuations of the Dieudonné determinants. In *Proceedings of the 46th International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC ’21)*, pp. 321–328, 2021.
4. Taihei Oki. Improved structural methods for nonlinear differential-algebraic equations via combinatorial relaxation. *IMA Journal of Numerical Analysis*, to appear.

（2）特許出願

研究期間累積件数：0件

（3）その他の成果（主要な学会発表、受賞、著作物、プレスリリース等）

国内会議発表：1件

1. 大城　泰平. 分割的付値斜体における Dieudonné 行列式の付値計算. 日本応用数理学会 2021 年度年会, 芝浦工業大学, 東京（オンライン開催）, 2021 年 9 月.