公開

研 究 終 了 報 告 書

「新しい凸性に基づくアルゴリズムと最適化理論」

研究期間: 2019 年 10 月～2023 年 3 月
研 究 者: 平井 広志

1. 研究のねらい

離散最適化理論における効率的アルゴリズム, すなわち, 多項式時間アルゴリズム, の設計の基本パラダイムは,「解きたい離散最適化問題をユークリッド空間上の凸最適化問題に埋め込むことによって, 連続的最適化の視点から離散的なアルゴリズムを設計すること」である. 本研究課題の目的は, このパラダイムを乗り超えて,「CAT(0) 空間といった非正曲率距離空間の凸性を利用する効率的アルゴリズム設計パラダイム」を確立し, それを, 数学・数理科学・情報科学諸分野へと活用することである. 具体的には, 以下の課題 A～E に取り組み, その成果の融合することで実現を目指す.

課題 A: CAT(0)空間上の最適化とアルゴリズム

CAT(0)空間上の凸最適化問題の研究は, まだ始まったばかりで, 近接点法などのごく基本的なアルゴリズムが研究されているにすぎない.課題 A では, 内点法などのユークリッド空間上での凸最適化アルゴリズムを CAT(0)空間に拡張することを目指す.

課題 B: 離散構造による空間表現論

本課題では組合せ的対象物に「面」を詰めて得られる（非多様体的な）CAT(0)空間も扱う. 課題 B では, いかなる組合せ的対象物に対していかなる構成法を用いることで, CAT(0)空間が得られるのかを研究する. そして, 得られた空間を計算機内に効率的に実現する手法を開発する.

課題 C:離散凸解析ビヨンド $\mathbf{Z}^n$

組合せ的対象物 X から CAT(0)空間 $K(X)$の構成（課題 B）によって, X 上の関数 f が $K(X)$上の関数 $\boldsymbol{f}$ へと拡張される. そして「$\boldsymbol{f}$ が $K(X)$上で凸」と定義することで, f の離散凸性が導入される. 課題 C では, このアプローチに基づき, 整数格子 $\mathbf{Z}^n$ を超えた離散構造上で離散凸解析を展開し, アルゴリズム設計フレームワークを構築する. そして, 具体的な離散最適化問題に応用する.

課題 D:代数的組合せ最適化

変数付き行列のランク計算, ベクトル空間族上の最適化問題といった代数的な組合せ最適化を, 上記課題の成果と, モジュラ束の CAT(0)空間埋め込みを指導原理にして追求し, その基礎理論を構築する.

課題 E: 関連する数学・数理科学・情報科学諸分野への横断的活用

本研究課題は, 広範囲にわたる数学・数理科学・情報科学分野にまたがるものである. 課題 E では, A から D の研究の成果・副産物の分野横断的活用を試みる.

2. 研究成果

（1）概要

それぞれの課題 A,B,C,D,E に取り組み以下の成果が得られた. 本課題が目指している「非正曲率距離空間の凸性を利用する効率的アルゴリズム設計パラダイムとその活用」に向けた着実な前進が得られた.

課題 A：CAT(0)空間上の最適化とアルゴリズム

変数の付いた行列のランクを効率的に求める問題（Edmonds 問題）は, 計算機科学における重要な未解決問題であるが, 各変数が非可換であるとした非可換 Edmonds 問題に対しては, 多項式時間アルゴリズムが知られている. この問題に対して, モジュラ束上の劣モジュラ最適化とCAT(0)空間上の分割近接点法を組合せた全く新しい多項式時間アルゴリズムを開発した. この成果に関していくつかの招待講演を行った.

この問題やその一般化に現れる「アダマール空間（完備 CAT(0)空間）上の最適化問題の有界性判定」に対して, 無限遠の振る舞いを記述する「後退関数」（recession function）の理論と関連する凸解析的理論を整備した. さらに, アダマール多様体上の測地的凸最適化問題に対する多項式時間解法を目指して, 内点法・自己整合障壁関数の理論の多様体上への拡張を行なった.

課題 B：離散構造による空間表現論

離散最適化の土台空間として期待される, モジュラ半束や SWM グラフの連続空間埋め込みであるオーソスキーム複体が CAT(0)空間になることを証明した（先行研究 Chalopin et al. 2020 の予想の証明）. これは, メディアングラフや A/C 型ユークリッドビルディングから決まる複体の CAT(0)性を特殊ケースとして含んでいる. 証明は, 束論を駆使して測地線を具体的に構成するというアルゴリズム的な手法に基づいている.

課題 C：離散凸解析ビヨンド $\mathbf{Z}^n$

点容量型最小費用自由多品種フロー問題と点容量型ターミナルバックアップ問題に対して, 離散凸解析ビヨンド $\mathbf{Z}^n$ のアプローチによって, 高速な多項式時間アルゴリズムの開発に成功した. これらの問題には, これまで良いアルゴリズムが知られていなかった.

課題 D：代数的組合せ最適化

変数の付いた多項式行列の非可換行列式の次数を求める問題（重み付き非可換 Edmonds 問題）にコストスケーリングを応用することで, 重要なサブクラスに対して, 多項式時間と強多項式時間アルゴリズムを与えた（池田基樹氏との共同研究）.

2部マッチング問題の代数的拡張である, 2×2 ブロックからなるジェネリックな分割行列のランク計算について, 増加道タイプのシンプルな組合せ的多項式時間アルゴリズムの開発に成功した（岩政勇仁氏との共同研究）

課題 E：関連する数学・数理科学・情報科学諸分野への横断的活用

本課題においては離散凸関数の土台空間として重要な有向モジュラグラフのさらなる一般化であるヘリーグラフに作用する群（ヘリー群）の幾何学的群論の立場からの研究を行い，論文を作成した（J.Chalopin, V.Chepoi, A.Genevois, D.Osajda との共同研究）．その他，オークション理論，系統樹組合せ論への応用研究を行い，論文を作成した．

（2）詳細

それぞれの課題 A,B,C,D,E に取り組み以下の成果が得られた．本課題が目指している「非正曲率距離空間の凸性を利用する効率的アルゴリズム設計パラダイムとその活用」に向けた着実な前進が得られた．

課題 A：CAT(0)空間上の最適化とアルゴリズム

変数の付いた行列のランクを効率的に求める問題（Edmonds 問題）は，計算機科学における重要な未解決問題であるが，各変数が非可換であるとした非可換 Edmonds 問題に対しては，多項式時間アルゴリズムが知られている．この問題に対して，モジュラ束上の劣モジュラ最適化と CAT(0)空間上の凸最適化アルゴリズムを組合せた全く新しい多項式時間アルゴリズムを開発した（濱田将樹氏との共同研究）．この成果は，本研究課題の着想のもとになったもので，ある程度に形になっていたが，証明の簡略化とともにp進付値を用いて有理数体上の問題を有限体上の問題に帰着させる新手法を追加している．これをまとめた論文は SIAM Journal on Applied Algebra and Geometry に採録された．この成果は注目を集め，幾つかの招待講演を行った．具体的には，SIAM Conference on Applied Algebraic Geometry (AG21) におけるミニシンポジウム “Invariant Theory and Optimization”， Simons Institute for the Theory of Computing のワークショップ”Optimization Under Symmetry”での講演，そして，GCT2022 Online Lecture Series の前・後編の2回にわけたオンラインレクチャーである．これにより当該分野の研究者たちとのコネクションが得られ，本研究課題の目指すところが認知されつつある．

群軌道ノルム最小化問題は，上述の非可換 Edmonds 問題や様々な情報科学・数理科学の問題への応用がある．この問題は，非正曲率対称空間上の測地的凸最適化として定式化できる．このとき（近似的な）最適解を求めることに加えて，最適化問題の有界性を判定することも重要な問題となる．ユークリッド空間の凸最適化においては，そのような有界性判定には，無限遠の振る舞いを記述する「後退関数」（recession function）の理論が有用である．そこで，後退関数や関連する凸解析的理論をアダマール空間（完備 CAT(0)空間）への一般化を行った．この成果を論文にまとめた．

関連して，特殊ケースである行列スケーリングの無限遠における漸近的振る舞いを解析し，2部マッチング問題へ応用した（林興養との共同研究）．この成果を論文にまとめた．

群軌道ノルム最小化問題への応用を念頭において，内点法・自己整合障壁関数の理論の（アダマール）多様体上への拡張を行なった．この成果を論文にまとめた．

課題 B：離散構造による空間表現論

モジュラ半束から決まるオーソスキーム複体が CAT(0)空間になることを証明した．その帰結として SWM グラフに対して決まるオーソスキーム複体も CAT(0)になることが示された（先行研

究 Chalopin et al. 2020 の予想）. これは, メディアングラフや A/C 型ユークリッドビルディングから決まる複体のCAT(0)性を特殊ケースとして含んでいる. 証明は, 束論を駆使して測地線を具体的に構成するというアルゴリズム的な手法に基づいている. この成果をまとめた論文は, Geometriae Dedicata 誌に採録された.

「一様モジュラ束」という束を導入し, それが, A 型ユークリッド的ビルディングという構造と等価であることを示した. これは可補モジュラ束と A 型球面的ビルディングの同等性（Birkhoff,Tits）の拡張にあたる. また, その上の離散凸関数（L 凸関数）も自然に導入された. この成果をまとめた論文は Advances in Geometry 誌に採録された.

上の2つの論文の成果は幾何学的群論の研究者（T. Haettel ら）にも使われる有用なものである.

モジュラ半束を計算機上で扱うことを意図して, Birkhoff 型コンパクト表現を確立した（中島蒼氏との共同研究）. この成果をまとめた論文は Order 誌に採録された.

セミモジュラ束から決まるオーソスキーム複体について研究への準備的段階として, セミモジュラ束の2つの極大鎖からモジュラ対のみのジョインとミートで生成される半順序部分集合を研究し, それがアンチマトロイドを生成することを示した（林興養氏との共同研究）. これは, モジュラ束に対する Birkhoff の古典的結果の拡張である. この成果をまとめた論文を作成した.

課題 C：離散凸解析ビヨンド $\mathbf{Z}^n$

点容量型最小費用自由多品種フロー問題に対して, 離散凸解析ビヨンド $\mathbf{Z}^n$ の枠組みを用いた高速な組合せ的多項式時間アルゴリズムを与えた（池田基樹氏との共同研究）. この成果をまとめた論文が Mathematical Programming 氏に採録された.

計算複雑度解析がほぼ未着手となっている有向距離空間上の施設配置問題（最小ゼロ拡張問題）の研究を行い, モジュラ束上では離散凸最適化となり多項式時間可解, 有向モジュラグラフ以外では NP 困難, という結果が得て, 2分定理確立へ向けた道筋をつけた（水谷隆平氏との共同研究）. この成果は国際会議 MFCS で発表され, 論文は Discrete Optimization 誌に採録された.

点容量型ターミナルバックアップ問題と呼ばれるネットワークデザイン問題が, 固定されたツリーのうえの部分ツリー全体の直積空間上の最適化問題になることがわかった. さらに部分ツリー全体にグラフ構造を導入することによって, メディアングラフ上の L 凸関数最小化となることがわかった. そして, 離散凸解析ビヨンド $\mathbf{Z}^n$ の視点から, 組合せ的な多項式時間アルゴリズムを構築した. また, 副産物として, 新しいタイプのマルチフロー問題に対する興味深い最大最小定理が得られた（池田基樹氏との共同研究）. この成果は, 国際学会 ICALP で発表され, 論文は, SIAM Journal on Discrete Mathematics にアクセプトされた. 論文では, コストスケーリング法がうまく動くための新しい離散凸性概念（N 凸性）に導入した. これにより, 議論が非常にスムーズになった. また, N 凸性は, ノーマルパスというパスに沿って定義されるものでメディアングラフを含む広いクラスのグラフ上の最適化問題に適用できるので, ほかの問題への応用も期待できる.

課題 D：代数的組合せ最適化

2部マッチング問題の代数的拡張である，2×2 ブロックからなるジェネリックな分割行列のランク計算について，増加道タイプのシンプルな組合せ的多項式時間アルゴリズムの開発に成功した（岩政勇仁氏との共同研究）．この結果を国際学会 IPCO で発表され，論文は Mathematical Programming 誌に採録された．

変数の付いた多項式行列の行列式の次数を求める問題（重み付き Edmonds 問題）は，Edmonds 問題の重み付きの一般化であり，いくつかの重要な組合せ最適化問題を含んでいる． この非可換バージョンは，行列式を Dieudonne 行列式（斜体上の行列式概念）に置き換えて得られる．重み付き非可換 Edmonds 問題は，ユークリッド的ビルディング上の離散凸最適化問題と定式化でき，擬多項式時間アルゴリズムが得られることがわかっていたが，コストスケーリングを応用することで，重要なサブクラスに対して，多項式時間と強多項式時間アルゴリズムを与えた（池田基樹氏との共同研究）．この成果をまとめた論文は，Computational Complexity 誌に採録された．

また，古典的な重み付き線形マトロイド交差問題をこの立場から考察し，代表的なアルゴリズムである weight-splitting 法が自然に導かれ，さらに，行列演算をベースにした新しい実装法が得られることがわかった（古江弘樹氏との共同研究）．この成果をまとめた論文は Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics 誌に採録された．

課題 E：関連する数学・数理科学・情報科学諸分野への横断的活用

幾何学的群論へ応用：有向モジュラグラフとも関係が深く，非正曲率空間の一つのグラフ的なアナロジーと考えられているものにヘリーグラフ（Helly graph）がある．ヘリーグラフに作用する群をヘリー群（Helly group）と名付け，その性質を調べ，いくつかの結果を得た（J.Chalopin, V.Chepoi, A.Genevois, D.Osajda との共同研究）．そして，共著論文を作成した．

また，H-J. Bandelt, J. Chalopin, V. Chepoi, D. Osajda とメトリックグラフ理論（Metric graph theory）に関する本を書くプロジェクトが始まったが，コロナ禍のためあまり進展しなかった．

オークション理論への応用：ポリマトロイド理論・離散凸解析を駆使して，片方向市場の予算制約付きオークションに対する最有用なメカニズムである Polyhedral Clinching Auction を売り手が正直であるという仮定のもとで，双方向市場の予算制約付きオークションへと一般化した（佐藤良亮氏との共同研究）．この成果をまとめた論文は，Mathematics of Operations Research に採録された．

系統樹組合せ論への応用：離散凸解析の研究で得られた手法を用いて，一般には NP 困難である「4点部分木族からの系統樹の再構成問題」に対して，新しい多項式時間可解なサブクラスとそのアルゴリズムを導入した（岩政勇仁氏との共同研究）．この成果をまとめた論文は，Algorithmica 誌に採録された．

3. 今後の展開

多くの重要なテーマが残されており，今後も本研究課題のフォーマット（課題 A,B,C,D,E）に従い研究をすすめていくのが有効であると考えている．特に，本課題の成果を社会実装につなげるには，以下に述べるような取り組みによって，本課題の構想が1つの学問潮流として世界中の多くの研究者に認識・参画してもらうことが必要であると考えている．それらを達成するのに 5~10 年ぐらいのタイムスパンを考えている．

課題 A：CAT(0)空間上の最適化とアルゴリズム

最終年に執筆した論文において，アダマール空間上の凸解析をさらに展開させる．そこで導入した概念（漸近 Fenchel-Legendre 双対，漸近勾配写像など）は，（量子）情報幾何とも相性がよさそうなのでこの方面についても研究をすすめたい．また，多様体上の内点法・自己整合障壁関数の理論の試みについても，これを「使える」理論に育てていくことが今後の課題である．この試みについては，すでに何人かの研究者よりポジティブな反応があり，招待講演の依頼や研究滞在の誘いも頂いているので，そうした研究交流も活用して研究を推進したい．

また，当初研究を予定していたが，研究期間では手がつけられなかったテーマ（CAT(0)空間上の近接点法の改良や計算幾何学）についても関連分野の知識を修得しながら研究をすすめたい．

課題 B：離散構造による空間表現論

モジュラ束に対応するオーソスキーム複体の貼り合わせでかけるように空間については本研究期間でだいぶ理解がすすんだので，より一般的なセミモジュラ束の場合について検討をすすめる．このような束論と非正曲率幾何学のインタラクションは，束論の新しい方向の研究でもあるので，伝統的な束論研究者・コミュニティにもアピールしていく必要があると考えている．

また，「局所的に」CAT(0)な複体の表現法やその上のアルゴリズムを研究する．これについては，（大域的に CAT(0)になる）普遍被覆空間を部分的に表現・保持するアプローチを今年度の指導学生の卒業論文で試みている．

課題 C: 離散凸解析ビヨンド $\mathbf{Z}^n$

本研究期間で，適用が期待されていたネットワーク最適化問題群へ適用は確かに成功したと考えている．しかし，まだ技術的に難しい部分が残っていて，今後は，本研究期間で導入した N 凸性をベースにした「使いやすい」フレームワークに育てていくことや，サーベイ論文執筆を考えている．また，これは以前から課題となっているが，非2部マッチング系列の問題へ応用できる離散凸解析理論の展開にもチャレンジしたい．

課題 D：代数的組合せ最適化

今後も，組合せ最適化とのインタラクションを追求して，組合せ最適化からその代数化，そして，その代数化からの組合せ最適化へのフィードバック，というサイクルを確立していく．最適化の観点からは，非可換 Edmonds 問題は，もともとの可換 Edmonds 問題の「緩和問題」とみなせるが，「少しずつ緩和を強めていく」という視点のもと研究をすすめる．本研究期間で導入した非可換 Newton 多面体や「自由斜体から少し退化させた」商斜体のもとでのランクを研究することでこの問題にアプローチすることを考えている．

課題 A,C に関わる研究分野には量子情報・計算の研究者が参入しており，関連も示されてきているので，その方面へ応用も視野にいれて研究をすすめる．

課題 E：関連する数学・数理科学・情報科学諸分野への横断的活用

今後も，数学・数理科学・情報科学諸分野への横断的な応用・活用に取り組み，異なる分野間のインタラクションをおこせたらと考えている．特に，直近には以下に取り組みたいと考えている：

研究期間内に扱うことが出来なかった Brascamp-Lieb 不等式への応用に関して，最近，分数マトロイドマッチングの関係が最近明らかにされたので，課題 A,D の成果の応用を考えている．

停滞している V. Chepoi たちのグループとの本（Metric Graph Theory）の執筆プロジェクトをすすめる．この本の完成は，本課題に関連する分野の諸結果（各所に散らばっていてアクセスしづらい状況にある），そして本課題の目指すところを，多くの研究者にアピールすることになると思われる．

4. 自己評価

コロナ禍の影響により，外国への出張と外国人研究者の招聘のための予算執行ができなったこと，本課題に関連するテーマでの指導する予定であった学生の退学・休学が相次いだこと，により，研究費の執行に関しては，計画当初のものより大幅に少ないものとなった．しかし，個人研究として集中して取り組み，それぞれの課題 A,B,C,D,E についてバランスよく成果を出せたと考えている．特に，本課題のコアである CAT(0)空間上の（離散）凸最適化を利用した非可換ランク計算が論文として出版されたことと，それとともに，招待講演を通して，いくつかの研究者コミュニティとつながりが得られたことが大きな成果であると考えている．また，それぞれの課題において，次の研究の足掛かりとなる新しい概念を創出できたこと，自身においても新たなチャレンジとなる連続最適化において成果を出して論文をかけたこと，についても満足している．そして，これらの成果が本研究課題の構想「非正曲率空間の凸性から多項式時間アルゴリズム」を軸とする数学・数理科学・情報科学にまたがる新しい学問潮流へのシーズとなることを期待している．

5. 主な研究成果リスト

（1）代表的な論文（原著論文）発表

研究期間累積件数：15件

1. Hiroshi Hirai: A nonpositive curvature property of modular semilattices, Geometriae Dedicata 214 (2021), 427--463.
モジュラ半束から決まるオーソスキーム複体が CAT(0)空間になることを証明した．その帰結として SWM グラフに対して決まるオーソスキーム複体も CAT(0)になることが示された（先行研究 Chalopin et al. 2020 の予想）．これは，メディアングラフや A/C 型ユークリッドビルディングから決まる複体の CAT(0)性を特殊ケースとして含んでいる．証明は，束論を駆使して測地線を具体的に構成するというアルゴリズム的な手法に基づいている．
2. Masaki Hamada and Hiroshi Hirai: Computing the nc-rank via discrete convex optimization on CAT(0) spaces, SIAM Journal on Applied Algebra and Geometry 5 (2021), 455--478.
非可換ランクを計算する新しい多項式時間アルゴリズムを開発した．このアルゴリズムは，非可換ランクをベクトル空間のなすモジュラ束上の劣モジュラ関数最小化とみなし，オーソスキーム複体と Lovasz 拡張によって，CAT(0)空間上の測地的凸最適化として解くという手法に

基づいている. また, p 進付値を用いて, 有理数体 $\mathbf{Q}$ 上の非可換ランク計算を有限体 $GF(p)$ 上の問題に多項式時間帰着させる手法も導入している.

3. Hiroshi Hirai and Motoki Ikeda: A cost-scaling algorithm for computing the degree of determinants, Computational Complexity 31 (2022) Article number: 10.

非可換行列式次数を求める問題の重要なサブクラスに対して多項式時間アルゴリズムを開発した. 次数の重みを「コスト」とみて組合せ最適化で知られるコストスケーリング法を適合させた. この問題がある整数多面体上の線形最適化とみなせることを示した. それによって, 各スケーリングフェーズの反復回数の見積もることができ, さらに, アルゴリズムの強多項式化にも成功している.

（2）特許出願
無し

（3）その他の成果（主要な学会発表、受賞、著作物、プレスリリース等）
招待講演 6 件

平井広志: 「離散凸解析 *beyond* $\mathbf{Z}^n$」, ワークショップ「離散凸解析と最適化」, 京都大学数理解析研究所, 2019 年 11 月 2 日(土).

Hiroshi Hirai: "Euclidean buildings in combinatorial optimization", Buildings, Varieties and Applications, MPI-Leipzig, 12 November 2019.

Hiroshi Hirai: "Computing the nc-rank via discrete convex optimization on CAT(0) spaces", SIAM Conference on Applied Algebraic Geometry (AG21), Online, 16 August, 2021.

Hiroshi Hirai: "Computing the nc-rank via discrete convex optimization on CAT(0) spaces", Optimization Under Symmetry, Simons Institute for the Theory of Computing, Berkeley, November 29, 2021.

Hiroshi Hirai: "Metric Graph Theory in Combinatorial Optimization", Metric Graph Theory and Related Topics, CIRM, Marseille, December 7, 2021.

Hiroshi Hirai: "Discrete Convex Optimization for Left-Right Action (nc-rank & det)", GCT2022 Online Lecture Series, December 14 & 17, 2021.