

研究報告書

「力学系における不安定対称解の探査と制御の新展開」

研究タイプ: 通常型

研究期間: 平成 21 年 10 月～平成 25 年 3 月

研究者: 水口 毅

1. 研究のねらい

本研究のねらいは、理学・工学の様々な分野において現象の記述や制御の基礎となる力学系の不安定解に注目し、不安定解を探査し制御する方法を開発することである。元来、不安定解とはその名称通り不安定であり、初期条件をその直上にとればそこにとどまるが、擾乱を加えればその擾乱が微小であっても解から離れてしまう。このため、熱揺らぎなど何らかの擾乱が常に存在するような現実の系において、不安定解を見いだすことはほとんどない。しかし、制御問題やカオス・乱流現象の解明など様々な場面で不安定解はその姿を垣間見せ、その役割は決して小さくない。特にストレンジアトラクタの中に埋め込まれた不安定周期解や多重安定系のベイスン上にある不安定解はその力学系の振る舞いを理解する上で重要である。

こうした中で、我々は時系列解析およびフィードバックという互いに関連する二種類の手法によって、初期条件の設定が困難な実験系に対しても適用可能な不安定対称解の探査及び制御の方法の開発をめざした。この方法は、系の持つ対称性に着目することによって不安定解を分類し、それぞれの対称性を有する解を選択的に探査することを可能にする。この方法を様々な系に適用することで不安定対称解の探査を行い、制御する手段の開発をめざす(テーマ A)。同時に、力学系の相空間の構造を解明する上で不安定対称解が果たす役割を追求する(テーマ B)。

テーマ A では、注目する対称性に対応した変換の像との距離が重要であり、それを調べることで、不安定対称解への接近を特徴づけられることを示した。対称性の種類は自律系に対する時間推進対称性以外にも、複数の同一要素からなる系に対する要素の交換対称性や、空間的に広がった系に対する空間並進対称性や反転対称性などが考えられる。これらの基本的な対称性を組み合わせることで様々な種類の対称解が考えられる。

テーマ B では、多重安定な力学系に着目した。多重安定な系にはベイスンすなわち複数ある安定状態のそれぞれに吸引される領域が存在しており、ベイスンもしくはその境界が相空間の構造を大雑把に特徴づけている。我々は、このベイスン境界上に存在する特定の不安定解に注目した。このような不安定解はその安定多様体がベイスン境界になっているという意味で、相空間構造とその変化を解析する際に重要となることを示した。

2. 研究成果

(1) 概要

力学系の解には安定性、トポロジー、対称性など様々な性質があり、それらによって分類することができる。なかでも不安定解はその不安定性のために、観測・実現することが容易ではない。しかしながら、倒立振子の不安定固定点や惑星間輸送ネットワークの不安定周期軌道などの例に見られるように、不安定解は制御問題での重要な目標状態でありうる。また、乱流・カオス系での相関関数やスペクトルなどの統計的性質を解明する上でも重要な役割を果

たしている。さらに、多重安定系では、不安定解が相空間のベイスンやフローの構造を特徴づけることもある。このように様々な状況において不安定解の探査方法を確立することの意義は大きい。

本研究では特に系が対称性を有する場合に着眼し、まず対称性による不安定解の分類と選択的な探査に焦点をおいた(研究テーマ A)。対称性は力学系の最も基本的な性質の一つであり、解もそれを満たすか否かで分類される。さらに、対称性の自発的な破れや回復は相空間の構造変化を特徴づける重要な現象である。この時、解の数や安定性などの定性的な変化はいわゆる分岐を引き起こすが、不安定対称解に着目することで分岐点近傍での対称性の回復過程が特徴づけられることを示した(研究テーマ B)。

(2) 詳細

研究テーマ A 「不安定対称解の探査と制御」

不安定解の探査においては様々な研究がすでになされている。特に、初期条件制御が可能な力学系であれば、ニュートン法とその発展にあたる一連の方法は非常に強力であり、本研究でも得られた結果を検証するためのツールとして用いられた(後述するベイスン境界上に制限したダイナミクスをトレースするために、初期条件制御が必要不可欠な PIM トリプル方法の一種が用いられている)。しかし、初期条件の制御が困難な場合、これらの方法を適用することはできない。このような場合においても適用可能な方法には、大別して時系列解析を用いた方法とフィードバックを用いた方法がある。これらの方法は特にリミットサイクルの探査に対して有効である。本研究では、ラスロップによって導入された時系列解析の手法をもとに、一般化した方法を提案した。ラスロップの方法は、カオス系にてある時刻の状態と遅延時間 τ だけ過去の状態との距離 d を長時間測定し続け、距離 d が小さくなったときの状態が周期 τ の不安定周期解に近づいたと判断している。図

1の実(赤)線はこの方法をローレンツ方程式の時系列に適用したもので、深い谷(a~d 等)の位置がストレンジアトラクタに埋め込まれた不安定周期解の周期をよく表している($p_1 \sim p_4$ は不安定固定点に対応し、 a_2 は a の二巻きに対応している)。ローレンツ方程式が自律系である、すなわち時間推進対称性を満たしていることに注意すると、遅延時間 τ だけ過去の状態とは時間

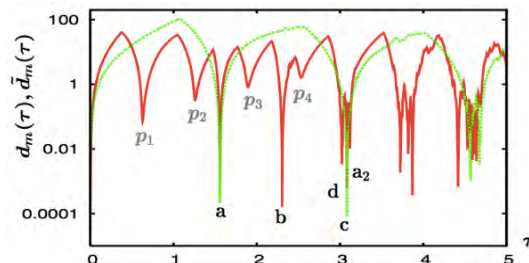


図1:ラスロップの方法及びその拡張によるローレンツ方程式の不安定周期解の探査例。横軸は遅延時間、縦軸は距離。実(赤)線はラスロップの方法。破(緑)線は軸対称性を組み合わせたもの。

推進という変換の像に他ならない。つまり、ラスロップの方法は系が有する対称性に対応した変換の像との距離を測定せよと解釈することができ、系が他の対称性を有する場合に一般化することができる。例えばローレンツ方程式が満たすもう一つの対称性(軸対称性)と時間推進の組み合わせに対して距離を定義し測定したのが図1の破(緑)線である。その谷(a, c)は軸対称な不安定周期解だけを選択的に探査している(論文1)。

この一般化は様々な対称性に拡張可能である。例えば、系が複数の同一要素から構成されていれば、要素の交換対称性が成立する(論文2)。また、空間的に広がった系で空間並進対称性や空間反転対称性が満たされている場合には、それらの組み合わせで時間的周期が

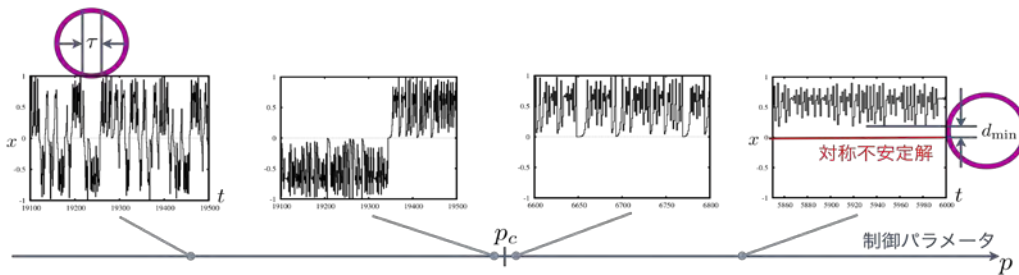


図2: アトラクタマージングクライシスの分岐点近傍での典型的な挙動と予兆. 制御パラメータ $p=p_c$ で分岐が起きる. $p < p_c$ で対称性は保たれており, $p > p_c$ で対称性は破れている. 四つのグラフは時系列の典型例であり, カオス的な挙動を保ちながら, p_c で $x=0$ に対する反転対称性の破れもしくは回復が起こる. $p < p_c$ から分岐点に近づく場合は間欠的な振る舞いで対称性の破れが予兆される. これに対し, $p > p_c$ から分岐点に近づく場合, 不安定対称解 ($x=0$) への接近が対称性の回復を予兆する.

つ空間的偶(あるいは奇)関数や, 時間推進と空間並進を組み合わせた変換に対して不変な相対的周期関数など様々なクラスの対称解が存在しうる. 実際, 蔵本・シバシンスキー方程式や複素ギンツブルグ・ランダウ方程式では時空間的なカオス状態の中にこれらの不安定対称解が埋め込まれていることが報告されている.

我々はさらに対称トラスの場合に注目した. トラス解ではその準周期性により, 適切な遅延時間が存在しない. しかしながら, 対称トラスの場合には互いに対称なポアンカレ断面対をとることで不安定解との距離が測定できることを示した(論文2).

研究テーマ B 「相空間構造の解明」

多重安定な系では, ベイソンすなわちそれぞれのアトラクタに吸引される初期条件集合とその境界によって相空間の構造が特徴づけられる. 系が対称性を有する場合, 自発的な対称性の破れや回復を伴う構造変化は解の数や安定性の変化と密接に関連づけることができる. 本研究では特に, カオス的な振る舞いを保ちながら系の対称性が統計的に破れる(あるいは回復する)という特徴を持つことで知られるアトラクタマージングクライシスという分岐現象に着目した. 対称性が保たれた側から分岐点へ近づく場合, 間欠性すなわちバースト間時間の発散という形で分岐が予兆されることは知られている(図2参照. 分岐点 p_c に左から接近するにつれて, バースト間時間 τ が長くなり, p_c で発散する. その発散はパラメータのずれに対してべき的に依存することが多い). 我々は, 対称性が破れた側から分岐点に近づいた場合に, 対称不安定解が重要な役割を果たすことを示した. 対称なベイソンの境界上にはマージング解(以下, M 解)と呼

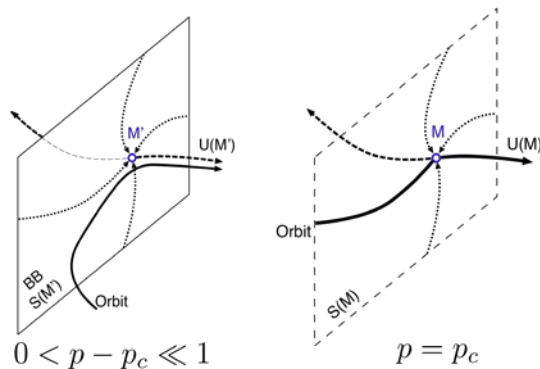


図3: アトラクタマージングクライシスの分岐点近傍でのダイナミクスとマージング解. (左) 対称性が破れた側の分岐点近傍の相空間の模式図. BB はベイソン境界. $S(M)$, $U(M)$ はそれぞれマージング解 M の安定多様体と不安定多様体. $S(M)$ はベイソン境界と一致している. M 解はベイソン境界上に制限したダイナミクスのアトラクタである. 軌道(Orbit)の最も外側の部分が M の近傍を通る. (右) 分岐点直上での相空間の様子. 軌道が M 解に接触し対称性が回復される. このとき, 軌道と M 解との距離もゼロとなる.

ばれる特定の不安定対称解があり、分岐点直上でストレンジアトラクタのもっとも外側の軌道がその不安定対称解に接触すると考えられる(図3)。このM解への接近によって対称性の回復が予兆される。M解には固定点・周期解・トラスなど様々なタイプが存在する。我々はそれぞれのタイプを実現する例を示し、テーマAによって得られた不安定対称解の探査方法を適用することで対称性の回復過程を特徴づけることに成功した(論文2)。特に、時間的な周期性が無いトラスに対しても、適用できるという特長を持つ。まず、PIMトリプル法の一種を用いてベイスン境界に限定したダイナミクスをトレースし、そのアトラクタであるM解がトラスであることを数値的に示した。しかし、この方法は初期条件の制御が必要な反復法の一つであり、実験・観測では実施困難である。我々は、初期条件制御が不要な方法として、互いに対称なポアンカレ断面对をとることで不安定対称解との距離を測定可能にした。この方法でM解が対称トラスであることを確認し、同時に対称性の回復の予兆を捉えることに成功した(論文2)。

また、ベイスンの数が多い場合の不安定対称解の分布と相空間の構造の関係を調べるための準備として、ベイスン数を増やすことができるモデルを構成した。内部状態を有する同一種類の要素の集団に対し、各要素をなんらかの抑制因子によって相互作用させることで、要素を異なる内部状態の集団に分けることが可能である(論文3)。このような系では異なる内部状態を持つ要素数比が一定の範囲で存在することから、ベイスン数が要素数のオーダーで増加する。

また、名前のサイズと頻度を実測し、その分布が希少な領域でべき的な傾向を示すことを見いだした。ネットワーク上でユール過程と排他原理の効果を取り入れたモデルが分布のべき的な傾向を定量的に再現することを示した(論文4)。分布関数は同じであっても系は多重安定である。これらの系の相空間構造と時間発展を調べることは今後の課題である。

3. 今後の展開

(1) 制御による対称トラスの安定化

着目する対称性に対応する変換の像との差に、ゲインと呼ばれる増幅係数を掛け元々の方程式に加えることでフィードバック項とすることができる。これはピラガスによって提唱された遅延フィードバックの一般化である。しかし、対称トラスの場合、その準周期性から時間推進対称性が存在せず、上記の方法は適用できない。今回我々が提案したポアンカレ断面对をとる方法では、対称トラスの安定化が期待できる。近年、時間推進および空間並進対称性を満たす偏微分方程式の相対的周期解が注目されているが、それらは本質的に対称トラスであり、その探査に本方法が有効であると思われる。

(2) 抑制型の多域結合系では、各要素が異なる内部状態に分かれ、各状態の要素数比が有限の範囲の値をとりうる。その結果、要素数のオーダーの状態が多重安定に存在することが、予備的な研究で確認されている。このようにベイスン構造が細かく分かれた系での不安定対称解の分布と相空間構造の関係を調べる。

(3) 相空間構造を明確化するという目的において、不安定対称解を用いる方法は、対称性を有する系でなければ適用できない。より対称性の低い系にも適用できる有効な手段として、時系列解析を用いた系のダイナミクスの推定に着手した。一般に散逸力学系の時系列は初期条件の影響が残っている緩和過程とアトラクタに吸引された後の定常過程に分離することができる。

時系列から系のダイナミクスに関する情報を抽出することを考えた場合、緩和過程には定常過程にない情報が含まれている。比較的簡単なモデル方程式から生成したデータを使った結果、データの質と量が十分な場合、時系列データから元の方程式を推定することが可能であることが示された。その場合、過渡過程のデータが重要になる。実際の実験あるいは観測データでは、観測量の数や長さ、ノイズなどの様々な要因によって困難になることが予想される。しかし、たとえば局在構造の衝突現象といった数値モデルから得られるオーダーパラメータの非自明な挙動などは、比較的取り組みやすい問題であると考えられる。生物の動的挙動などの実測データに関しても取り組みたい。

4. 自己評価

テーマ A の不安定対称解の探査に関して、対称トラスの探査法は偏微分方程式などへの応用も期待できるという意味で評価できる。しかし、空間的に広がった系での様々な対称解の探査およびフィードバックを用いた制御に関しては十分な追求ができず、今後の課題として残されている。テーマ B に関しては対称性の回復過程という相空間の構造変化を捉えることができた部分は評価できる。多安定状態系の解析に関してはこれからである。また、時系列解析によるダイナミクスの推定はその端緒についた段階であり、今後の発展が期待される。他の分野との協働という観点から考えると、基礎的なツールの開発にとどまり、具体的なデータを共有して解析するというところまで進めなかったという意味で追求不足であった。

5. 研究総括の見解

理学・工学の分野における様々な現象においてその不安定解に注目し、それを軸に記述し、制御するという視点は複雑に遷移するダイナミクスを対象にする場合の非常に有効な視点である。

水口氏は対称性の観点から不安定解の探査、分類を行い、制御する手段の開発をめざす課題および力学系の相空間の構造を解明する上で不安定対称解が果たす役割を考察するという課題の2つをテーマに掲げ研究を推進した。前者の不安定解の探査においては、初期条件の制御が困難な場合でも適用可能な方法には、時系列解析を用いた方法とフィードバックを用いた方法があり、水口氏はラスロップによって導入された時系列解析の手法をより一般化した方法を提案した。その思想は系が有する対称性に対応した変換の像との距離を測定せよと解釈することができ、系が他の対称性を有する場合に一般化することに成功し、多くの系において不安定解の探査と分類に有用な方法論を与えたことは高く評価できる。後者の相空間構造の解明ではカオス的な振る舞いを保ちながら系の対称性が統計的に破れる(あるいは回復する)という特徴を持つアトラクタマーキングクライシスという分岐現象に着目し、とくに対称性が破れた側から分岐点に近づいた場合に、対称不安定解が重要な役割を果たすことを示したことは重要な発見である。実際、対称なベイスンの境界上にはマーキング解(以下、M 解)と呼ばれる特定の不安定対称解があり、これが対称性の回復の予兆等に重要な役割を果たすことが明らかにされた。水口氏の仕事は数理の視点の面白さが出ていると言える。今後この視点の有効性はさらに拡大すると思われる。

6. 主な研究成果リスト

(1) 論文(原著論文)発表

1. Y. Morita, N. Fujiwara, M. U. Kobayashi, T. Mizuguchi. "Scytale Decodes Chaos: A Method for Estimating Unstable Symmetric Solutions". CHAOS. 2010. vol 20. 013126-1-6
2. T. Mizuguchi, M. Yomosa, N. Fujiwara, M. U. Kobayashi. "A Detection Method of Symmetry Restoration Process of Attractor Merging Crisis". The European Physical Journal B. 2012. vol 85. 230-237
3. T. Mizuguchi, K. Sugawara, T. Kazama, "Task Allocation in Multistate Systems". Journal of Advanced Computational Intelligence and Intelligent Informatics. 2010. vol 14. 574-580
4. R. Hayakawa, Y. Fukuoka, T. Mizuguchi, "Size Frequency Distribution of Japanese Given Name". Journal of the Physical Society of Japan. 2012. vol 81. 094001-1-5

(2) 特許出願

研究期間累積件数:0 件

(3) その他の成果(主要な学会発表、受賞、著作物、プレスリリース等)

学会発表

1. T. Mizuguchi, "Symmetry restoration process in attractor merging crisis", Japan Slovenia Seminar on Nonlinear Science Kansai 2010 (Sakai, Japan, November, 2010)
2. T. Mizuguchi, "Symmetry restoration process and unstable symmetric tori", Far-from Equilibrium Dynamics 2011 (Kyoto, Japan, January, 2011)
3. T. Mizuguchi, M. Yomosa, N. Fujiwara, M. U. Kobayashi, "Role of unstable symmetric solutions in symmetry restoring processes.", Dynamics Days Europe 2011 (Oldenburg Germany, September, 2011)
4. T. Mizuguchi, "Estimation of dynamics focusing on a transient process", Frontiers in Dynamical Systems and Topology, (Kyoto, Japan, November 2011)