研 究 報 告 書

「非線形放物型方程式の解の爆発とその応用」

研究タイプ:通常型
研究期間: 平成 21 年 10 月～平成 25 年 3 月
研 究 者: 溝口 紀子

1. 研究のねらい

非線形関数方程式論は解析学だけでなく幾何学や代数学の手法も取り入れながら発展してきた。また、実際に自然現象や社会現象を記述している非線形微分方程式も多く、数学以外の分野とも関連している。関数方程式論では有限時間における解の爆発は非線形問題に特有の現象であり、1960 年代に始まってから世界中で多くの数学者に研究され中心的な研究分野のひとつとなっている。数学では、偏微分方程式や偏微方程式系の解の時刻 t での空間的な最大値M(t)が t がある時刻 T に近づくと無限大に発散するとき、解は時刻 T で爆発すると定義される。数学における爆発は、例えば、物質の燃焼のモデルでは発火に対応し、生物モデルでは細胞がある時間内にある場所に集中してその密度が測定不能なほど大きくなる事象に対応する。他にも多くの自然現象や社会現象で、(実際に数値が無限大になることはないが) 実験や観測である時刻で数値が非常に大きくなることはあり得る。

このような現象を数学的な爆発と捉えることができれば、実験や観測から得られた混沌としたデータから数学的な手法を用いて論理的な側面からのより系統的かつ効率的な解析や予測が可能になるのではないかと考えられる。あるいは、実際に起きている現象は、数学的には有限時間で爆発する解に非常に近い解とみなせば、数値は無限大にならないが特異性に近い現象は説明できる。一方、数理生物学などからは数学の問題として見ても非常に興味深くその時点の数学では証明するのが困難な問題が数多く提供されてきた。この研究では、数学における爆発に関する結果や研究方法を他分野で実際に見られる現象に応用するだけでなく、他分野の問題から、それを解決するために新たに数学の理論や手法を開発することが必要となるような興味深い問題を発見するための糸口を探る。

2. 研究成果

(1)概要

半線形熱方程式 $u_t = \Delta u + u^p$ (ただし、冪 p は 1 より大きい定数とする) の解の性質を調べた。これは藤田方程式ともよばれる。藤田宏氏が 1960 年代にこの方程式を導入し、有限時間で爆発する解の存在を初めて証明して以来、この偏微分方程式は非線形放物型方程式の中でも集中的に研究されてきたもののひとつである。非線形項 u^p を関数 $f(u)$で置き換えるとより一般的な $u_t = \Delta u + f(u)$ となる。爆発問題を考える場合は u が非常に大きいときの $f(u)$ の値が重要なので、$f(u) \sim u^p$ (u が大きいときのオーダーが等しいことを示す) ならば u^p の場合の結果から予測することができるという理由から、藤田方程式を研究することは重要である。本研究では、藤田方程式をはじめとして関連する偏微分方程式のさまざまな

解の挙動について調べた。

また、生物学から発生した数学的にも興味深い問題として次の偏微分方程式系がある:

$$(C)\ \begin{cases} u_t = \Delta u - \nabla(u\nabla v), \\ \gamma v_t = \Delta v - \mu v + u. \end{cases}$$

ただし、γ とμ はそれぞれ正の定数、非負の定数とし、空間次元は2とする。これは細胞性粘菌の集中現象を記述するモデルとして 1970 年に Keller と Segel によって提唱された。ここで、u は粘菌の密度を、v は化学物質の濃度を表している。粘菌が自ら生成する化学物質に向かって動く様子を表しているので走化性方程式系または Keller–Segel システムとよばれている。本来のシステムでは係数 γ は正の定数であるが、数学的にそれを研究するのは非常に困難だったので、 $\gamma = 0$ とした単純化されたシステム

$$(SC)\ \begin{cases} u_t = \Delta u - \nabla(u\nabla v), \\ 0 = \Delta v - \mu v + u \end{cases}$$

が導入され、これについては既に多くの論文が発表されている。本研究では、単純化されたシステム(SC)について、これまで他の多くの数学者がとってきたのとは異なる観点から爆発解の詳細な振る舞いを明らかにした。

本来のシステム(C)でも時間大域的に存在する解についてはだんだん分かってきた。しかし、爆発については特別な方法で構成されたひとつの解はあるが、「爆発はどの程度頻繁に起きるのか」という基本的な疑問に数学的に答えることができず、それは走化性方程式系における最大の未解決問題となってきた。本研究では、球対称解に対してその未解決問題を解いた。

(2)詳細

半線形放物型方程式

関数 $u(x,t),\ x = (x_1, x_2, \cdots, x_N)$ に対して、$\frac{\partial u}{\partial t}$ は u の t に関する偏導関数を、$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ は u の x_i に関する2階偏導関数を表し、

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2}$$

とする。藤田方程式とよばれる半線形拡散方程式$u_t = \Delta u + u^p$ (ただし、冪 p は 1 より大きい定数とする) に対して、エネルギーを定義することができ、エネルギーが時間に関して増加しないことは分かっている。その性質をもとにして、「初期エネルギーが負ならば、解は有限時間で爆発する」ことは既に証明されている。しかし、初期エネルギーが正の場合は複雑で、他の方程式(波動方程式など)でも重要な役割を果たす Nehari 関数を用いて研究されてきた。本研究では、解の爆発とは無関係に見える「Nehari 多様体(Nehari 関数を用いて定義される)と定常解の安定多様体が横断的に交わる」という無限次元力学系的な結果を証明することによって、藤田方程式の解の爆発に関する代表的な未解決問題のひとつを解決した([1])。 他に、藤田方程式に移流項を加えた偏微分方程式についても研究したが、これは次の走化性方程式系と密接に関連しているのでそこで述べる。

走化性方程式系

1970 年に Keller と Segel は細胞性粘菌の集中現象を記述するモデルとして偏微分方程式

系

$$(C)\ \begin{cases} u_t = \Delta u - \nabla(u\nabla v), \\ \gamma v_t = \Delta v - \mu v + u \end{cases}$$

を提唱した。ただし、γ は正の定数、 μ は非負の定数とする。$x = (x_1, x_2, \cdots, x_N)$ の関数 $f\,(x)$ の勾配は

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_N}\right)$$

で定義される。u は粘菌の密度を、v は化学物質の濃度を表している。第2方程式から化学物質は粘菌自身から生成され、第1方程式から粘菌は化学物質の勾配の変化が大きいところに向かって動く様子を表しているので走化性方程式系(chemotaxis system)とよばれている。本来のシステムでは係数 γ は正の定数であるが、数学的にそれを研究するのは非常に困難だったので、 $\gamma = 0$ とした単純化されたシステム(simplified chemotaxis system)

$$(SC)\ \begin{cases} u_t = \Delta u - \nabla(u\nabla v), \\ 0 = \Delta v - \mu v + u \end{cases}$$

が導入された。本来のシステム(C)はともに放物型の方程式からなるが、単純化されたシステム(SC)では第2方程式が楕円型になっているので、方程式の基本的な型が違うことから両者の数学的扱いは全く異なる。実際、(SC)では、楕円型方程式の基本解を用いて v を u で表し、その式から ∇v を計算して第1方程式に代入すればシステムではなく単独の偏微分方程式になる。この単独の偏微分方程式に数学的な理論や手法を適用するというのが(SC)を研究するための主なシナリオである。このようにして(SC)については多くの論文が発表されている。さらに、球対称の場合は、次の偏微分方程式に帰着できる:

$$(RSC)\ w_t = w_{rr} + \frac{N+1}{r} w_r - r\,w\,w_r + Nw^2\,.$$

ただし、r は原点からの距離で、N は空間次元である。Keller と Segel が提唱した実際の生物モデルでは $N = 2$ であるが、他の応用分野では $N \geq 3$ の場合もある。この偏微分方程式から移流項 $r\,w\,w_r$ を除けば球対称解に対する藤田方程式である。

これまで発表された(SC)の爆発解に関する論文での主要な結果は、爆発時刻に近づくと解はデルタ関数的な特異性をもつという粗い評価であった。本研究では、球対称解に対して、爆発の速度を特定し、それをもとにして爆発点の近くでの解の漸近挙動を決定した。また、空間次元が 3 以上の場合に、 type I の爆発をする(RSC)の解は爆発時刻に近づくと球対称な後方自己相似解に漸近することを証明した([2])。ここで、type Ⅰ の爆発は対応する常微分方程式 $w_t = N\,w^2$ の解と同じ速度での爆発を、type II の爆発は type I より速い速度での爆発を表す。さらに、type II の爆発をする(RSC)の解の空間的な形状は藤田方程式の type II の爆発解とは全く異なることを証明し、移流項が本質的に影響することを示した([3])。

本来のシステム(C)でも、有界領域で Neumann 境界条件のもとでの時間大域解については(SC)と同様の数学的手法が適用できるが、全平面では無限遠方での減衰の扱いが異なる。したがって、初期値問題では時間大域解が存在するための条件が最適化されていなかった。本研究では、初期時刻で u の平面上での積分が 8π より小さいという条件のみで時間大域解の存在を証明することによってその条件を最良の形にした([4])。

一方、(C)の爆発解については「特別な方法で構成されたひとつの解以外に爆発解が存在するか」という基本的な問題が数学的には解けない状態のままで、走化性方程式系における最大の未解決問題となっていた。本研究では、球対称解に対して $L^p \times W^{1,2}$ $(p>1)$ 内の少なくともひとつの球に含まれる初期値から出発する解は有限時間で爆発することを証明した。これによって、爆発解をあたえる初期値は無限次元あることが分かった。さらに、少し位相を弱めた空間 $L^p \times W^{1,q}$ $(p \in (0,1),\ q \in (1,2))$ では爆発解に対応する初期値は稠密に存在することを示した。これらの結果とその証明のために新しく導入された数学的手法によって本来のシステム(C)の爆発解に関する研究がやっと緒に就いたということができる。

3.　今後の展開

走化性方程式系の本来のシステムは放物型 – 放物型であるが、それを数学的に扱うのが困難だったので、放物型 – 楕円型の単純化されたシステムが導入された。Keller と Segel が 1970 年に生物モデルとして提唱して以来、この放物型 – 放物型のシステムの爆発についてはひとつの特別な解の構成以外は数学的な研究はされていなかった。すなわち、「爆発はどの程度頻繁に起こる現象なのか」という基本的な問題が長年未解決だった。本研究で新しい方法を開発して球対称解についてはこの未解決問題を肯定的に解いた。これによって数学的に扱う方法が導入されたので、これからは解が爆発する様子を調べることができる。また、今はまだ球対称解に限っているので　今後はその制限をはずして一般的な解へと研究を拡げていきたい。さらに、この放物型 – 放物型方程式系の解が爆発した後、どのような振る舞いをするかを調べたい。

走化性方程式系は細胞が化学物質に向かって移動するシステムであるが、細胞と化学物質を他のものに変えたシステムもあり得るだろう。今後は他の反応拡散系についても研究したい。

4.　自己評価

生物モデルから生まれた問題で世界的にも多くの数学者の興味を引いてきた長年の未解決問題を完全に解決するためのブレイクスルーを得ることができ、これから世界中で本格的かつ多面的にこの放物型 – 放物型のシステムの研究が行われるようになるだろう。また、ここで開発した数学的な方法は他の放物型 – 放物型の方程式系の研究にも役立つのではないかと思われる。実際の細胞性粘菌の集中現象をモデル化した方程式系が数学的にも非常に興味深い構造をもち、それを解明するために多く数学者によって数学的手法が開発され数学が進歩したという事実を見ると、応用と数学は深い意味で繋がっているという感想をもった。さきがけ研究期間に私自身が他分野の研究者と連携して結果を得ることはできなかったが、このさきがけ研究を通じて私自身の研究の視野は広がったと思う。単に今すでにある数学を他分野に応用するという連携ではなく、連携することによってもたらされた問題を解くために新しい数学的な理論や手法の開拓を求められ、それによって数学が発展するような連携を3年半という短期間で行うことはできなかったので、引き続きそれを模索することが私自身の今後の課題である。

5.　研究総括の見解

爆発問題はなんらかの意味で集中・凝集が起きる場合には、避けて通れない問題である。実際には値が無限にならなくとも、そう近似することで明確にある。溝口氏は藤田方程式およびKS-方程式に対し多くの貢献を成した。前者の藤田方程式に対しては、「Nehari 多様体（Nehari関数を用いて定義される）と定常解の安定多様体が横断的に交わる」という無限次元力学系的な結果を証明することによって、藤田方程式の解の爆発に関する大きな未解決問題のひとつを解決したことは評価に値する。また KS-方程式に対し、「爆発はどの程度頻繁に起きるのか」という基本的な疑問に対して、球対称解の範疇で爆発解をあたえる初期値は無限次元あることを厳密に示し、解決の扉を開いた寄与は大きい。今後は他分野研究者とも連携し、新たな数学の問題発掘にも貢献して欲しい。

6.　主な研究成果リスト

（1）　論文（原著論文）発表

1. F. Dickstein, N. Mizoguchi, Ph. Souplet and F. Weissler , Transversality of stable and Nehari manifolds for a semilinear heat equation, Calc. Var. Partial Differential Equations 42 (2011), 547-562.
2. Y. Giga, N. Mizoguchi and T. Senba,　Asymptotic behavior of type I blowup solutions to a parabolic-elliptic system of drift-diffusion type, Arch. Rational Mech. Anal. 201 (2011), 549-573.
3. N. Mizoguchi and T. Senba, A sufficient condition for type I blowup in a parabolic-elliptic system, J. Differential Equations 250 (2011), 182-203.
4. Nonexistence of radial backward self-similar blowup solution with sign-change, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. 141A (2011), 825-834.
5. N. Mizoguchi, Global existence for the Cauchy problem of the parabolic-parabolic Keller-Segel system on the plane, Calc. Var. Partial Differential Equations (to appear).

（2）　特許出願

なし

（3）　その他の成果（主要な学会発表、受賞、著作物、プレスリリース等）

学会発表：

1. Refined asymptotics of blowup solutions to a simplified chemotaxis system, Parabolic and Navier-Stokes equations, 2012.9.3, Banach Center, Poland.
2. 非線形拡散方程式の爆発解について, 広島大学談話会, 2011.12.20, 広島大学.
3. Transversality of stable and Nehari manifolds for a semilinear heat equation, RIMS 研究集会, 2011.6.6-8, 京都大学数理解析研究所.
4. Global existence of solutions to the Keller-Segel system, Nonlinear PDE Seminar, 2011.2.11, Univ. Paris 13, France.

5. On type II blowup solution for a parabolic–elliptic system, PDE Seminar, 2010.2.17, Univ. Autonoma de Madrid, Spain.

受賞: 第31回猿橋賞

プレスリリース等: 日経サイエンス 2012年2月号 フロントランナー 挑む 第12回「微分方程式の解は爆発しても消えない」