

# 研究報告書

## 「非線型マクロ経済モデルのためのフレームワークの構築」

研究タイプ: 通常型

研究期間: 平成 21 年 10 月～平成 25 年 3 月

研究者: 田村 隆志

### 1. 研究のねらい

現代のマクロ経済学では、個々の経済主体が自身の効用や利益を最大化するという仮定のもとモデルが構築されています。これは数学の確率制御理論の応用にほかなりません。さらに興味深い点として、それらの経済主体同士の行動を適当な仮定(例えば市場の均衡)のもと結びつけ分析している点、さらにモデルに経済主体の将来に対する期待を合理的期待という仮定のもとに取り込んでいる点が挙げられます。

合理的期待の仮定のもとでは、将来の予想が現在の経済変数を決定し、またその現在の経済変数が将来の予想を決定するという循環構造をモデルは抱えることとなります。モデルの解はこのような循環構造のある意味不動点として特徴づけられます。従来、合理的期待を仮定してモデルを解く場合、定常状態の周りで線形化して数値的に解き、解析するのが一般的です。高次の近似を扱う先行研究もありますが、その場合、モデルの解の存在が厳密に取り扱われていないというのが私の理解です。

本研究では合理的期待の仮定の下でのマクロ経済モデルにおける非線形効果を厳密に取り扱うためのフレームワークの構築を目指しました。これは単に数学的興味にとどまらず、ゼロ金利制約下でのマクロ経済モデルの振舞いや、金利の期間構造を取り扱う際に実際に重要になるものです。

### 2. 研究成果

#### (1) 概要

そもそもの難しい点は経済主体の抱く予想・期待がどのように決定されるか広く合意されたモデルがないことにあります。経済主体の消費・貯蓄・投資などの行動はそれが抱く予想に基づいて、何らかの効用や利益を最大化するように決定されると経済学では信じられていて、モデルに組み込まれています。しかし、そもそも、その予想・期待がどのように決定されたものかが問題になりますし、これが決まらなるとモデル内での経済主体の行動も決まらず、モデルが解けないこととなります。そこで現代の経済学では経済主体が持つ予想・期待は合理的である、という仮定をおいてモデルを解くことが広く行われています。ここでいう合理的とは、経済主体が抱く予想と、その結果決定された経済行動から導かれる経済変数の分布が一致するという意味です。

注目すべきことは、この段階でもやはり、期待がどのように決定されるかモデルに明示的に組み込まれているわけではなく、暗黙的に解く必要があることです。マクロ経済モデルが線形の場合にはこれは線形代数の範囲で非常にうまくいっていました。しかし、ゼロ金利制約がある場合、自然にモデルは非線形となりうまくいきません。

先行研究では、ゼロ金利制約を扱うために、将来時点の経済状態を完全に予測可能と仮定したり、social plannerを導入したりしていましたが、これらがモデルを解くためのアドホックな仮定であることは否めません。これらの仮定はモデルの安定性を無条件に良くするものであり、マクロ経済モデルの解析の主題の一つが安定性の解析であることを踏まえると受け入れがたい仮定です。

本研究では、外乱が非常に小さいか、あるいは定常状態でのインフレ率が高くゼロ金利制約の影響が小さい場合に、適当な仮定の下、合理的期待を満たす解が存在することを示しました。ゼロ金利制約が存在する場合も、従来のモデルの自然な拡張として取り扱うことが理論上は可能であることを示しました。

## (2) 詳細

従来は線形近似したモデルを解析の対象としていたので、基本的に線形代数の知識を使ってモデルは解かれていました。本研究の設定では有限次元の線形空間の話に帰着することはできませんので、関数方程式の問題として定式化し、適当な仮定の下に解が存在することを示しました。具体的には外乱を表す確率過程の状態空間を、リアプノフ関数の等高線で区切り、技巧的に写像の適用を繰り返し行うことで、縮小写像を構成し、解の存在を示すというものです。抽象的な方法ではありますが、解釈として遠い将来の予想の微小な変動に対してモデルが安定であるということが、縮小写像が構成できることに対応しているので、それほど現実離れた話ではないと考えています。

従来の線形モデルにおける線形代数を使った解法の自然な拡張になっています。逆を言えば、従来単なる線形代数のテクニックとしてしか捉えられていなかったものに、「遠い将来の予想の微小な変動に対する安定性」という意味づけがクリアに与えたと言えると思います。またモデルの高階近似を用いる方法に比べ、計算機での実装はより難しくなっていますが、ゼロ金利制約を自然に扱えるようになってきていると思います。

## 3. 今後の展開

理論的には解の存在を示しましたが、実際の数値計算では線形モデルに比べ取り扱いが難しいものになっています。数値計算で容易に取り扱えるような近似方法を確立することが応用面の課題であると考えています。また本研究の結果は、合理的期待という仮定だけからは解が一意に定まらない場合があることを強く示唆しており、期待が形成される過程そのものを明示的にモデルに組み込む必要があるだろうと予想されます。そのようなモデルを構築する方法の研究が今後必要であろうと思われます。金利の期間構造の解析に関しては、マクロ経済モデルの高階近似を正面から行う方法の他に、単純なマクロ経済モデルと誘導型モデルを組み合わせる方法が考えられ、この場合には数理ファイナンスへの応用、特にリスク中立確率の挙動を調べることに応用出来ると考えています。

## 4. 自己評価

得られた非線形モデルの解の存在は非自明なものではありますが、それが定性的・定量的にどのような意味を持つかの解析にいたっておらず、質・量共にあまり芳しい成果を上げることができませんでした。

## 5. 研究総括の見解

合理的期待の仮定の下でのマクロ経済モデルにおける非線形効果を厳密に取り扱うためのフレームワークの構築を目指した研究であり、それ自体は一つの意味のある重要な課題設定と思われる。問題の困難点、例えば、経済主体の抱く予想・期待がどのように決定されるか広く合意されたモデルがないことにあると指摘するが、それも含めどのように問題を設定するかについても、さきがけ期間中に挑戦してほしい内容であった。本さきがけ研究の成果は、外乱が非常に小さいか、あるいは定常状態でのインフレ率が高くゼロ金利制約の影響が小さい場合に、適当な仮定の下、合理的期待を満たす解が存在することを示したものであり、それは「遠い将来の予想の微小な変動に対する安定性」という意味づけがクリアに与えたとあるが、それを論文等に発表することにより、その是非を問い、より広く議論されることがなかったことは極めて残念なことである。

## 6. 主な研究成果リスト

### (1) 論文(原著論文)発表

なし

### (2) 特許出願

なし

### (3) その他の成果(主要な学会発表、受賞、著作物、プレスリリース等)

講演

1. 非線形マクロ経済モデルに現れる数学, JST 数学領域 第4回領域シンポジウム「越境する数学」, 東京大学, 2012年11月.