研　究　報　告　書

「科学工学モデルの安定性に関する計算機援用解析」

研究期間：　平成19年10月～平成22年3月

研 究 者：　長藤　かおり

1．研究のねらい

自然科学や工学における現象解析のための数理モデルについて，主にその安定性を中心に数学理論と計算機を用いて厳密に解析する。通常の数値シミュレーション（近似計算）による解析結果に対して数学的な保証を与えること，また理論的な解析が不可能，あるいは非常に複雑な場合に対して計算機援用による解析手法を確立することを目標とする。

2．研究成果

研究期間中に得られた成果は下記の通りである：

(1)　1 次元シュレディンガー作用素に対する固有値の除外法および非線形シュレディンガー方程式の解の検証

(2)　非圧縮粘性流体の安定性問題

(3) Travelling wave の安定性証明

(4)　微分作用素の複素固有対の精度保証

(5) 2 次元反応拡散方程式の解の検証

(6)　関数方程式の解の安定性証明

以下，それぞれについてまとめる。

(1) 1 次元シュレディンガー作用素の固有値問題

$$-u'' + q(x)u + s(x)u = \lambda u, \quad x \in \mathbb{R}$$

を考える。ここで $q \in L^\infty(\mathbb{R})$ は周期関数，$s \in L^\infty(\mathbb{R})$ は無限遠方で減衰する摂動項である。これはバンドギャップ構造の本質的スペクトルを持つ作用素であり，スペクトル・ギャップにおいて離散スペクトル（固有値）が存在するか否かは固体電子論において重要な問題である。この問題の固有値の非存在範囲の検証について，非常に効率的な手法を開発することができ，さきがけ研究開始当初から進めていた本研究について新たな検証数値例を追加することにより論文投稿することができた。また，周期ポテンシャルを持つ1次元非線形シュレディンガー方程式の解の検証法も提案し，検証数値例を与えた。（論文投稿準備中）

(2)　2次元領域における非圧縮粘性流体の基礎方程式である Navier-Stokes 方程式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial p}{\partial x} + \dfrac{1}{R}\Delta u, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{\partial p}{\partial y} + \dfrac{1}{R}\Delta v, \\ \qquad \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

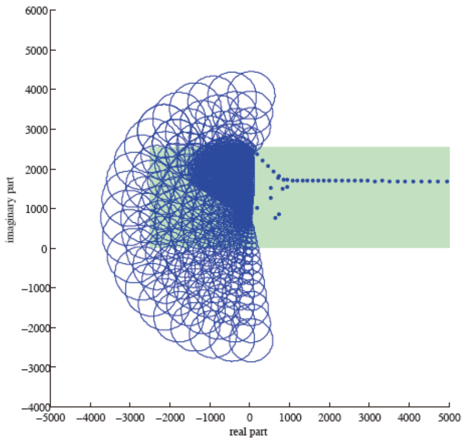
を考える．ここで (u, v) は速度ベクトル，p は圧力，R は Reynolds 数である．この支配方程式を満たす基本流れとして，

$$(u, v) = (U(y), 0), \;\; p = p_0 + \frac{1}{R}\frac{d^2U(y)}{dy^2}x \qquad (\, p_0 \text{ は適当な定数})$$

を考え，この基本流れの安定性を考える際に基礎的な役割を担うのが，次で記述される Orr−Sommerfeld 方程式である：

$$(-D^2+a^2)^2u+iaR\left[U(-D^2+a^2)u+U''u\right]=\lambda(-D^2+a^2)u \quad \text{in} \quad I$$

ここで $D=d/dx$, a は波数である。基本流れの安定性は Orr−Sommerfeld 方程式の固有値 λ と密接に関連している。つまり，適当な境界条件のもとで，λ の実部がすべて正であれば安定であり，そうでなければ不安定である。本研究では $U(x)=1-x^2$, $I=[-1,1]$ となる Poiseuille flow の場合について安定性を厳密に証明した。



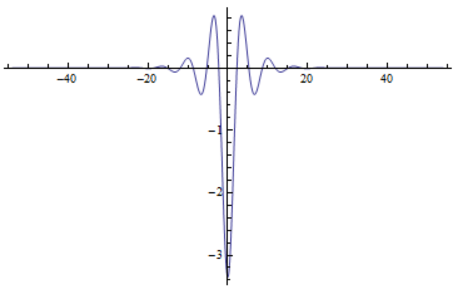
緑の領域は理論的な固有値の存在範囲を表す。青い円内には固有値が存在しないことを証明できたため，固有値の実部はすべて正であることが分かる。

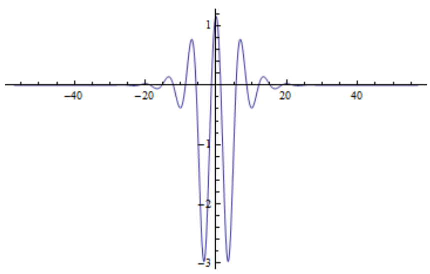
(3) 指数関数的な非線形性を持つ beam 方程式に対して，ある波速に対して少なくとも 36 個の Travelling Waves が存在することが計算機援用証明により 2006 年に Breuer らにより示されているが，これらの解の軌道安定性は重要な未解決問題であった。本研究では，

$$\frac{d\varphi}{dx^4}+c^2\frac{d\varphi}{dx^2}+e^{\varphi}-1=0, \quad x\in\mathbb{R}$$

の解 φ を用いて表される Travelling Wave $u(x,t)=1+\varphi(x-ct)$ について，その軌道安定性・不安定性を計算機援用証明により厳密に判定することに成功した。

近似解の形状





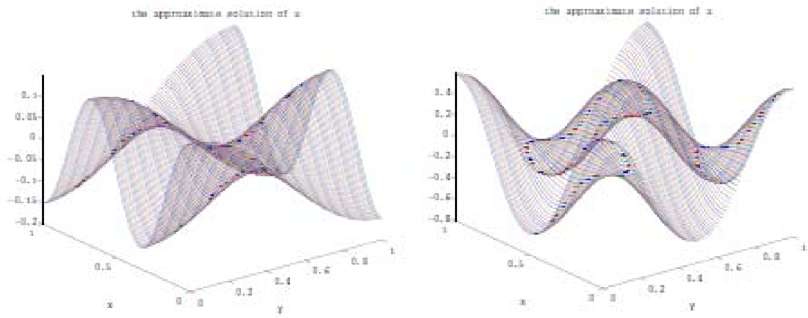
(4) 非線形微分方程式系の周期境界値問題に対する数値的検証法を提案した。特に，作用素が非対称で固有関数が周期境界条件を満たす場合の多重複素固有値および複数の単純（実または複素）固有値を精度保証付きで求める手法を開発し，良好な検証数値例を得た。上の(2)でも見たように，複素固有値の存在（あるいは非存在）範囲を数学的に厳密に求めることは，安定性の解析において非常に重要である。

⑸2次元有界領域における反応拡散方程式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = D_u \Delta u + f(u,v) \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = D_v \Delta v + g(u,v) \end{cases}$$

をノイマン境界条件のもとで考えた場合の定常解に対する数値的検証法を提案し，いくつかの f, g について解を包み込むことに成功した。

近似解の形状



⑹ $(S, \circ)$ を groupoid とするとき，すべての $x, y \in S$ に対して

$$(x \circ y) \circ (x \circ y) = (x \circ x) \circ (y \circ y)$$

を満たすならば S は square-symmetric であるという。本研究では，左単位元を持つ square-symmetric な groupoid 上で定義された実数値関数に対する関数方程式

$$\max\left\{ f\left((x \circ y) \circ y\right), f(x) \right\} = f\left(x \circ y\right) + f(y)$$

の Hyers-Ulam 安定性を証明した。

3．今後の展開

上記の⑴, ⑶, ⑸について，既にいくつかの発展的な研究課題を設定し取り組んでいる。まず⑴については，1次元問題における解の検証だけでなく，それが ground state であることの証明法に取り組み，数値実験を行っている。また多次元問題への拡張にも取り組んでいる。⑶については更に効率的な安定性判定法の構築を目指すとともに，吊橋単独ではなくその上を物体（列車等）が走る場合の進行波についても問題を拡張しているところである。⑸については，時間発展問題としてのパターン形成の計算機援用証明法に取り組んでいる。これは計算機援用解析と半群理論を併用するもので，発展方程式に対する計算機援用証明法としての新しい結果となることが期待できる。また，関連する解の安定性についての考察も既に進めている。

4．自己評価

「安定性」というキーワードのもとに，当初目標に掲げた3つの研究テーマ

（Ⅰ）非圧縮粘性流体の安定性問題

（Ⅱ）反応拡散方程式系の解の安定性解析
（Ⅲ）Schroedinger 作用素のスペクトル解析
に取り組み，それぞれにおいて新たな知見を得ることに成功した。(II)の安定性に関わる部分と(III)の多次元への拡張については間に合わなかったが，今後の展開として既に研究に着手しており，近い将来の解決を目指している。さきがけ研究期間中に非常に多くの研究者との有益な研究討論の機会を持つことができ，それぞれのテーマにおける研究の進展に大いに役立った。他分野や企業との協働が十分でなかったという反省点が残るが，全体としては当初の目標の大部分は達成でき，更に関連する発展課題も設定できた。

5. 研究総括の見解

「安定性」というキーワードのもとに、当初目標に掲げた 3 つの研究テーマ（Ⅰ）非圧縮粘性流体の安定性問題、（Ⅱ）反応拡散方程式系の解の安定性解析、（Ⅲ）Schroedinger 作用素のスペクトル解析、に取り組み、それぞれにおいて精度保証に基づく計算機援用証明を実施し、新たな知見を得ることに成功した。

6. 主要な研究成果リスト

（1）論文（原著論文）発表

	1. Y. Watanabe, K. Nagatou, M. Plum, M. T. Nakao, A computer-assisted stability proof for the Orr-Sommerfeld problem with Poiseuille flow, a special issue of ``Nonlinear Theory and Its Applications, IEICE'' on ``Recent Progress in Verified Numerical Computations'', Vol.2, No.1 (2011), pp. 123-127.
	2. K. Nagatou, T. Morifuji, An Enclosure Method for Complex Eigenvalues of Ordinary Differential Operators, a special issue of ``Nonlinear Theory and Its Applications, IEICE'' on ``Recent Progress in Verified Numerical Computations'', Vol.2, No.1 (2011), pp. 111-122.
	3. A. Gilanyi, K. Nagatou, P. Volkmann, On the stability of a functional equation characterizing the absolute value of additive functions, Annals of functional Analysis 1 (2010), No.2, pp.1-6.

（2）特許出願

該当なし

（3）その他（主要な学会発表、受賞、著作物等）

1. K. Nagatou, Y. Watanabe, S. Yamamoto and T. Kinoshita, Validated computations for elliptic systems of FitzHugh-Nagumo type, 13th GAMM-IMACS International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetic, and Validated Numerics (SCAN 2008), The University of Texas at El Paso, USA (2008.9.30)
2. K. Nagatou, M. Brown, M.-N. Kim, Y. Watanabe, I. Wood, M. Plum, M.T. Nakao, Spectral Problem on 3-D Maxwell's Equations, 7-10 March 2009, International workshop on verified computations and related topics, University of Karlsruhe (TH), Germany. (2009.3.8)
3. K. Nagatou, Computer Assisted Proofs for Nonlinear Partial Differential Equations, INDAM Meeting: Theoretical and computational methods in nonlinear differential equations, Centro Residenziale Universitario di Bertinoro, Forli, Italy. (2009.9.16)
4. K. Nagatou, M. Plum, M.T. Nakao, Eigenvalue excluding for perturbed-periodic 1D Schroedinger operators, Conference on Inequalities and Applications 2010, Hajduszoboszlo, Hungary. (2010.9.20)
5. K. Nagatou, P.J. McKenna, M. Plum, Orbital stability investigation for travelling waves in a nonlinearly supported beam, SIAM/MSRI workshop on Hybrid Methodologies for Symbolic-Numeric Computation, MSRI, Berkeley, California, USA. (2011.11.18)