

# 研 究 報 告 書

## 「水圏環境力学理論の構築」

研究期間：平成19年9月～平成23年3月

研究者：坂上 貴之

### 1. 研究のねらい

私達の身近な水圏環境(河川・湖沼・海洋)で起こる問題, 例えばタンカーからの重油漏れ事故, 海上空港が周辺水域に及ぼす影響, 湖沼における生物多様性の変化と生態環境の回復など, 日常生活に密接に関わるものばかりです. この研究構想では, これらの水圏環境問題を統一的に扱える数学理論へ水圏環境力学への構築と, それを応用したソフトウェアの開発により現実の環境問題に応えられる新概念・シミュレーション手法の提案を目指す.

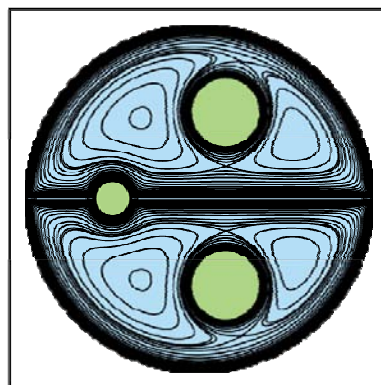
### 2. 研究成果

**【理論研究】** 河川や湖沼, 海岸で起こる問題を扱うための流れ場を数理解析する基礎理論の構築を行った. 理論解析が容易になるように, 流れは二次元非粘性・非圧縮流と簡単なものを考えたが, その代わりに二次元多重連結領域の複雑な形状やその内部障害物の配置が自由に扱えるように理論構築を行った. 二次元非粘性・非圧縮流体では, ケルビンの循環定理が成立するため, 初期時刻に渦度が存在しない限り, 渦は生成しない. この事実に基づいて, 初期時刻に渦が存在する領域だけを離散近似して, その上の流体粒子(点渦)の運動として流体運動を近似する「渦法」と呼ばれる常微分方程式系に帰着させることで, 渦と境界の相互作用を理論的・数値的に研究する基盤を構築することが可能になる(点渦力学の構築).

この定式化を任意の多重連結領域の上で適用可能にするためには, 与えられた多重連結領域に対するグリーン関数(点渦の複素速度ポテンシャル)を構成しなければならない. 本さきがけ研究ではこれに対応すべく, 二つのアプローチをとった.

#### A. 二次元多重連結領域における点渦力学理論

多重連結領域の標準領域(円領域)を考え, その上で点渦方程式を構築した. ここでは2005年にDarren Crowdyによって与えられた標準円領域におけるグリーン関数が用いられるが, 本さきがけ研究においてこの基礎方程式の導出を行った, また標準円領域における点渦の定常配置の理論研究を行った. これを元に, 与えられた領域からこの標準円領域への等角写像を構築することで, 標準円領域における点渦方程式がどう変化するかを考えより広い多重連結領域での点渦力学の展開が完成し, 広い問題に 응용が可能になった. なお, この場合, 与えられた領域から標準円領域への等角写像をどう構築するかが問題になるが, これに対しても数値等角写像を用いることで多重連結スリット領域の場合には広く利用可能であるということがわかった. 成果は主要な研究成果リスト(1)論文2として公開済みである. 右図はある多重連結領域における点渦の軌道の様子を示したものである.



#### B. 数値等角写像を用いた流れ場の構築

上の標準円領域を通した理論を使う場合, 与えられた任意の領域から標準円領域への等角写像の構築が一般には困難であるため, それを数値的に構成することが重要になる. これに対して与えられた任意の多重連結領域の上での点渦の複素速度ポテンシャルを数値等角写像によって実現する数値的手法を応用することで実現し, 幅広い応用が獲得

できるようになった。

### C. 点渦力学系理論の深化

多重連結領域における点渦力学の数学理論を構築する上で必要なハミルトン力学系理論による理論的取り組みを推進した。特に球面点渦に関する理論の構築(点渦力学の高速数値計算法・カオス軌道の発見・定常解の特徴付け・衝突解の存在)に大きな進展があり、その成果は多重連結領域への拡張可能なものである。成果は主要な研究成果リスト(1)論文3, 4, 5, 6として公表済みである

次に、ここで構築された理論を拡張する意味で二つの事柄についても研究し以下の成果を得た。

### D. 二次元多重連結領域における流れの構成(一様流・吸い込み, 湧き出し)

二次元非粘性非圧縮流体の研究を様々な流れに応用するには、上の点渦力学で達成される点渦の流れだけでなく、湧き出し・吸い込みや一様流といった基本流れを構成することも重要である。標準円領域における一様流の流れについては既に Darren Crowdyによって与えられているが、本さがけ研究では湧き出し・吸い込みの流れの構成に成功した。

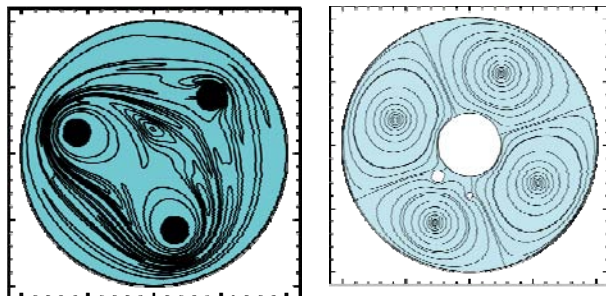
### E. 二次元多重連結領域における点渦統計流れの構築

与えられた多重連結領域における流れ場として点渦力学によって構成される非定常時間発展が扱えるようになったが、こうした流れ場は初期の点渦の配置などに応じて、様々な挙動を示すので、多重連結水圏環境場における代表的な流れと取り扱うことには適さな場合がある。そこで、点渦力学の多粒子系の極限として定義される点渦統計力学の問題を考えた。このような流れは多くの初期値の集合に対してもっとも達成されやすい流れを与えるため多重連結環境場における標準流れの候補としても最適である。ここで扱う方程式は sinh-Poisson 方程式であるが、この解を数値的に構成する手法を開発し、与えられた多重連結領域における点渦統計解を構成した。以下にいくつかの例を示す。

**【環境問題への応用研究】** 理論研究の成果を水圏環境の問題に適用する数値計算法を開発した。具体的には以下の二つのモデル研究を行った。

### A. 二次元多重連結領域における化学物質・生態系モデルの数値解析

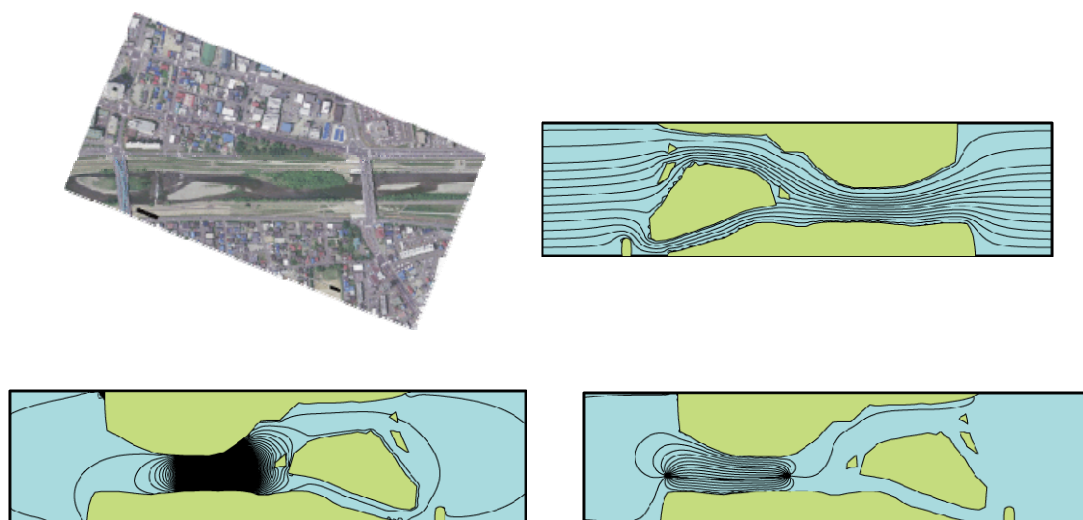
点渦力学・点渦統計解などで構成される流れ場を用いて、その流れの上で物質移流と与える移流拡散方程式、生態系の変化を扱う移流・拡散・反応方程式を与えられた多重連結領域で数値的に解く手法を埋め込み境界法・およびコンパクト差分スキーム法を組み合わせることで実施する手法を開発した。移流拡散モデルでは、流れの双曲型淀み点ではなく、それらを結ぶホモクリニック・ヘテロクリニックな粒子軌道の周囲で汚染物質が集まりやすいことなどが示唆された。右図は標準流れによる物質移流の様子(右側)とある多重連結領域における統計的標準流れ(左側)の様子である。



### B. テスト問題「河川領域」の研究

河川における物質移流・生態系モデルを構築するためのモデル問題として「河川問題」を設定し、その上で流れを構成する数値等角写像を構成する手法を開発した。河川領域とは多重連結チャネル領域として定式化できるが、その領域の中で一様流・渦・吸い込み・湧き出しの複素速度ポテンシャルを構成した。これによって、複雑な形状を持った、河川領域における数

値点渦力学が可能になった。実際の地図から河川の外形を読み込んで、その上でもこのアルゴリズムが適用可能なことを確認し、河川生態学や河川の水質基準を求める上での基礎的な流れ場構成手法を完成した。成果は主要な研究成果リスト(1)論文1として現在投稿中である。以下にその計算例(豊平川とその上で的一様流れ・点渦・吸い込み湧き出しの数値的構成)を示す。



### 【環境流体問題の探索・数学理論の深化】

#### A. 数理環境流体セミナーの実施

環境流体・数値解析・力学系理論など、本さがけ研究の展開に必要な専門知識を得るための「数理環境流体セミナー」を実施した。さがけ研究開始から終了までに計13名専門家からの情報提供を受けた。具体的な講演者と講演タイトルは以下の通りである。

第1回	2007. 11.12	泉 典洋 氏 (北海道大学)	水工学における地形動力学問題
第2回	2007. 11.29	雨宮 隆 氏 (横浜国立大学)	湖沼生態系管理に関する数理科学の理論と実践
第3回	2008. 1.25.	天野 要 氏 (愛媛大学)	代用電荷法による数値等角写像の方法
第4回	2008. 5.16	千葉 逸人 氏 (京都大学)	Extension and unification of singular perturbation methods for ODEs based on the renormalization group method
第5回	2008. 6.30.	佐竹 暁子 氏 (北海道大学)	繁殖同調の数理モデルと生態系と人間社会のカップリング
第6回	2009. 7.13.	小林 健太 氏 (金沢大学)	非凸領域における有限要素解の事前誤差評価
第7回	2009. 8.7.	服部 哲弥 氏 (慶応大学)	Move-to-front 規則, Burgers 型方程式, そして web アクセスランキング解析
第8回	2009. 12.7.	降旗 大介 氏 (大阪大学)	ボロノイ格子を用いた、自由形状領域での離散変分導関数法
第9回	2010. 10.8.	小林 幹 氏 (京都大学)	カオス力学系の手法を用いたGOYシエルモデル乱流における間欠性の解析

第10回	2010. 10.22.	佐々木 英一 氏 (京都大学)	回転球面上の帯状流の分岐
第11回	2010. 12.24.	柴山 充瑠 氏 (京都大学)	衝突多様体論による可積分性の判定
第12回	2011. 2.4.	Rhodri Nelson 氏 (英国・Imperial College London)	Modelling vortex-vortex and vortex-boundary interaction
第13回	2011. 2.8,	Nitsan Ben-Gal 氏 (イスラエル・Weizmann Istitute)	Non-Compact Global Attractors and Dynamics at Infinity for Slowly Non-Dissipative Reaction-Diffusion Equations

B. JSTシンポジウム「環境問題における数理の可能性」の開催

上記研究集会を、JST戦略的創造研究推進事業 国際化強化支援策の資金援助を受け、また北海道大学大学院理学研究院数学部門・北海道大学数学連携研究センター・横浜国立大学GCOE「アジア視点の国際生態リスクマネジメント」との共催で開催した。本研究集会では、環境問題の解決に資する数理科学的アプローチの可能性について、外国人2名を含む招待講演者6名による先端の研究成果の発表が行われるとともに、ポスターセッション14名による発表を通じて参加者全員を交えた活発な議論が行われた。招待講演者による発表のテーマは、(1)氷河の温暖化による影響を調べる数値シミュレーション(Marco Picasso教授)、(2)空間分布を持った数値データの統計的処理(栗原考次教授)、(3)気候変動にともなう乾燥と皮膚への影響とその数理科学モデルによる研究(傳田光洋博士)、(4)生物多様性と食物網解析(Axel Rossberg博士)、(5)地球温暖化予想モデルの数理的展開(伊藤公紀教授)、(6)生態系保護を目指す河川工学と数理モデル(辻本哲郎教授)であった。これらの講演すべてにおいて、それぞれ数理的アプローチの手法紹介や問題点また今後の方向性などについて問題提起が行われた。研究者また、公募により開催されたポスターセッションでは、分野を超え多くの参加者全員によるきわめて活発な議論が行われ、招待講演だけではカバーできなかった様々な分野とつながる環境問題や数理的な方法が公表された。また、特筆すべき成果として、最終日には参加者全員参加による総合討論の時間が設けられ、講演者や数学領域のさきがけ研究員からなる組織委員および参加者からも活発な意見が交換された。そこで環境問題のようなきわめて学際的な分野については、従来のような一つの学問体系として問題にアプローチするのではなく、強固な学問的背景を持つ多くの研究者が一つの「共通問題」として環境問題をとらえ、互いに協力しあいながら解決のため「研究者の鎖(chain of researchers)」の枠組みを作り、それによりアプローチするのが効果的であり、数学者は自身の持つ方法論や考え方を活かして問題の様々な局面に挑戦する形がよいという意見が出された。実際、数学が本来もつ論理性・抽象性や普遍性をうまく応用することによって、これまでにない新しい発見があることが期待され、それを実現するためにも今後継続的にこうした異分野研究者の交流が必要との共通認識を持つに至った。こうした認識は数学による諸分野におけるブレークスルーの探索という研究領域の環境科学方面への展開手法を考える上で極めて示唆的であると思われる。

詳細はホームページ<http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/sympo/080611/program.html>に掲載されている。これらの講演内容をベースにした講究録(北大数学講究録Vol.136)も発行し、広く本研究集会の成果を公表した。本講究録は上記HPからダウンロード可能になっている。

C. 研究成果の発表に関する主要な招待講演

(1) IUTAM シンポジウム Vortex Dynamics; 150 Years (2008 年 10 月 13 日～16 日)

選抜講演者

- (2) 日米先端工学シンポジウム(JAFoE)(2009年11月12日～14日) 招待討議者
- (3) 日本学術会議 理論応用力学講演会(2011年3月6日～8日)  
OS「多重連結領域問題の数値解析とその周辺」基調講演者

その他の講演・発表については「外部発表連絡票」にすべて記載している。

#### D. 様々な他分野研究機関との研究交流会の参加

本さがけ研究の一つの目標として環境・数理を結びつける研究機関や研究者との交流や、理論展開に必要な数学研究者との共同研究や研究交換が必要である。これを積極的に推進し、さがけにおける水圏環境理論の数学構築の構築とその応用の展開に多いに役立った。

- (1) UCLA IPAM プログラム「Optimal Transport」(2008年3月11日～13日)
- (2) 国際研究集会 Resilience 2008 (ストックホルム 2008年4月14日～16日)
- (3) ケンブリッジニュートン研究所「Nature of High Reynolds Number Turbulence」(2008年9月～12月)に参加
- (4) 英国 Sheffield 大学応用数学科滞在(2008年9月～2009年3月)
- (5) 国立環境研究所来訪(2010年12月15日)
- (6) 豊田中央研究所交流会(2010年12月20日～21日)

### 3. 今後の展開

《基礎理論の CREST 研究への展開》本さがけ研究において、数学基礎理論として構築した多重連結領域における点渦力学理論は、天野らによる数値等角写像の手法と組み合わせることで、水圏環境の問題のみならず、非常に多くの問題に適用可能であることが明らかになった。すなわち生物の飛翔や遊泳、風力発電のプロペラの配置や形状、スキージャンプやヨットセーリングなどのスポーツ力学などにおいても、ある理想的な状況において、境界と境界から生成されて渦との相互作用がその運動の理解に重要な役割を果たすことが多くの研究から明らかになりつつあり、この数学的な基礎として本理論が適用可能であることがわかった。このことを受けて、本理論を核として「多重連結領域における境界と渦の相互作用」をキーコンセプトとしたプロジェクトを提案し、平成 23 年度 JST 数学領域における CREST 研究計画「渦・境界相互作用が創出するパラダイムシフト」として採択された。本 CREST 研究計画はさがけ研究のさらなる発展を目指したものとして今後も強力に推進する予定である。

《環境問題への本格的応用に向けて》本さがけ研究では水圏環境問題における流れの構成に関して、多くの成果が多く得られた。また、それを用いて、汚染物質の拡散(移流拡散方程式)や生態系の発展(移流拡散反応方程式)とのカップリングが可能になった。また、河川領域といったテスト問題に対しても、自由に流れ場を構成することができるようになった。こうした数理的・数値的の手法の確立がなった現在、今後はこれらの成果を実際の環境問題へ応用したい。その流れとして上記 CREST 研究の中には「環境工学・エコデザイン」をターゲット分野の一つとして掲げており、また、数理環境に関するポスドクが現在 JSPS の外国人特別研究員として申請中であり、本研究員の採択があった場合はより一層強力に研究が推進できるものと思われる。また環境における他分野研究者との連携も推進したい。本さがけ研究のおかげで、国立環境研究所の研究グループとの交流が始まりつつあり、河川環境汚染や河川生態学、環境基準の確定のための数理モデルなど、今後、相互の研究分野間の連携を図る計画が進行しており、上記 CREST 計画の中でさらに共同研究を拡大する予定である。

### 4. 自己評価

《理論的研究》当初計画に基づいて二次元多重連結領域における非粘性・非圧縮流体の運動を取り扱える数学的枠組みに関する研究は順調に進んだ。特に、本さがけ研究を始めた結果として数値等角写像の理論が極めて有益な数値的手法であることがわかり、理論

が他分野協働のための基礎理論として展開できるようになったことは想定を越える成果であった。そのおかげで、本理論が適用範囲を拡大し、水圏環境問題のみならず、「渦・境界相互作用」というキーワードで、生命流体・スポーツ力学・エコデザインなどにも応用できることが判明し、それが CREST 研究につながったことは、さきがけ研究の一つの成果と考えている。一方で、理論の中核をなす多重連結領域に付随して定義される Schottky-Klein-Prime 関数の代数的研究も目指したが、こちらは力及ばず小さな結果にとどまり大きな成果を得られなかった。この方向での研究は今後も続けていきたいと考えている。

《協働研究》他分野協働を実際に行うための枠組みとして、数値等角写像と標準領域における点渦力学理論が完成し、さらに、それを現実の流れに応用が可能な形にまで展開できたことは大きな成果であった。また、多重連結領域における標準流れの数値的構築が可能になったことや、それらの流れに基づいて物質移流や生態系モデルを数値的に解く数値スキーム(埋め込み境界法・コンパクト差分スキーム法)が構成できたことも当初の予定通りの成果である。本研究対象である「水圏環境」への本格的展開としては、特に、河川の流れを構成する多重連結チャンネル領域の流れの構成などは、衛星画像からとりこまれたデータから流れを構成するところまで完成できたことが、今後の河川環境学分野への進出の大きな足がかりとなったことは極めて有意義だと考えている。一方で、当初目指していたこれら一連の衛星画像から流れ場構成までを一環して行うソフトウェア開発については、実際にこの作業の自動化がそれほど簡単でないということが例を積み重ねるに従って次第に明らかになってきたため、今後の研究で経験を積み重ねていく形で終わることになったのは残念であるが、こちらも後継の CREST 計画の方で可能な限り実現したいと考えている。

《さきがけ研究としての成果》研究成果と明記できるかどうかはわからないが、本さきがけ研究を通じて、他分野応用を狙う気鋭の他のさきがけ研究者と知り合うことができたことがたいへん有意義であった。特に領域会議において、従来の研究発表だけでなく、オーガナイズセッションを企画させていただき、そのとりまとめ役としてさきがけ研究者横つなぎや戦略目標実現のための活動を支援できたことは極めて有意義であった。加えて、さきがけという活動を通じて、従来の数学研究者としては決して知り合えることのない多くの環境関係の研究者と知り合えたことは今後の CREST 研究のみならず、数理環境学という今後の環境問題を考える一つの軸となりうる分野の構築に向けた大きな財産となった。

《全体を通じての自己評価》研究課題である「水圏環境力学理論の構築」という目的の中心的な目的としての理論構築は、ほぼ当初通りの成果であった。その応用という面では、数値的な解法の確立は一部の問題では進んだものの、本格的な協働研究にはこの期間で至らなかった。一つには理論構築が目的であったことにもあるが、もう一つには新たに作り上げられた理論の本格的応用を実施するには、理論を広めその適用範囲を示し、現実問題を扱う環境科学者に理解を深めてもらう活動が必要であったようである。このようなことは本課題の後半1年程度の間急速に進んだと思うが、少し時間がたらなかった。しかし、この流れを活かして、今後の CREST 活動でも継続的に本理論の本格的応用に向けて他分野協働を積極的に活かしていきたいし、それは可能だと考えている。

## 5. 研究総括の見解

身近な水圏環境(河川・湖沼・海洋)で起こる問題に対して統一的に扱える数学理論へ水圏環境力学への構築を目指し、二次元多重連結領域の複雑な形状やその内部障害物の配置が自由に扱えるような理論構築を行なうことができた。また適用範囲の拡大により、水圏環境問題のみならず「渦・境界相互作用」というキーワードで、生命流体・スポーツ力学・エコデザインなどにも応用できることが判明し、今後が大きく期待される。

## 6. 主要な研究成果リスト

(1)論文(原著論文)発表

1.	T. Sakajo and Y. Amaya, Numerical construction of potential flows in multiply connected channel domains, submitted to <i>Computational Methods and Function Theory</i> , 査読中 (2010)
2.	T. Sakajo, Equation of motion for point vortices in multiply connected circular domains <i>Proc. Roy. Soc. A</i> , vol. 465 pp. 2589–2611 (2009), doi:10.1098/rspa.2009.0070
3.	T. Sakajo, An extension of Draghicescu’s fast tree-code algorithm to the vortex method on a sphere, <i>Journal of Computational and Applied Mathematics</i> , vol. 225 pp. 158–171 (2009) doi: 10.1016/j.cam.2008.07.021
4.	P. K. Newton and T. Sakajo, Point vortex equilibria on the sphere via Brownian ratchets, <i>Proc. Roy. Soc. A.</i> , vol. 465 pp. 437–455 (2009), doi:10.1098/rspa.2008.0203
5.	T. Sakajo, Non self-similar, partial and robust collapse of four point vortices on a sphere, <i>Physical Review E</i> , vol. 78 No. 1 (2008) doi: 10.1103/PhysRevE.78.016312
6.	T. Sakajo and K. Yagasaki, Chaotic motion of the N-vortex problem on a sphere: I. Saddle-centers in two-degree-of-freedom Hamiltonians, <i>J. Nonlinear Science</i> , vol. 18 (5) pp. 485–525 (2008) doi: 10.1007/s00332-008-9019-9

(2)特許出願

なし

(3)その他(主要な学会発表、受賞、著作物等)

1. (著作物) T. Amemiya, H. Serizawa, T. Sakajo, K. Itoh, Mathematical models for dynamics and management of algal blooms in aquatic ecosystems, submitted to Aquatic Ecosystem Research Trends, NOVA Publishers (2008)
2. (著作物) Proceedings of JST Presto Symposium on Mathematical Sciences towards Environmental Problems <http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/sympo/080611/> (北大テクニカルレポート136号として出版済)
3. (国際研究集会) JSTシンポジウム「環境問題における数理の可能性」(2008年6月11日～13日)
4. (国際研究集会) IUTAM シンポジウム Vortex Dynamics; 150 Years, 選抜講演者 (2008年10月13日～10月16日) コペンハーゲン
5. (国際研究集会) 日米先端工学シンポジウム(JAFoE) 招待討議者(2009年11月8日～12日)
6. (国内研究集会) 日本学術会議 理論応用力学講演会 (2011年3月6日～8日) OS「多重連結領域問題の数値解析とその周辺」基調講演「点渦力学と数値等角写像による新展開」