研　究　報　告　書

「確率過程の統計推測法の基礎理論およびその実装」

研究期間：平成 19 年 10 月～平成 23 年 3 月
研 究 者：吉田　朋広

1．研究のねらい

確率微分方程式に対するデータ解析の基礎理論、確率数値計算および半解析的方法による期待値の近似，種々の近似法のオプションやリスク評価への応用を課題とし，確率過程の統計推測理論、漸近分布論、保険数理・ファイナンスへの応用を包括的に研究する．さらに、ソフトウエアとしての実装の研究を行う．

2．研究成果

● **非線形時系列に対する高次統計推測論**

ε－マルコフ過程は,離散時間非線形時系列モデル,マルコフ過程,確率微分方程式,マーク付き点過程など,応用に現れる広範な確率過程を含んでいる．ε－マルコフ過程の汎関数の漸近展開の応用として,推定量の漸近展開，高次有効性，検定問題，情報量規準，情報幾何との関係,ノンパラメトリック推定等に関して多くの結果が導かれる．ε－マルコフ過程を基礎の過程とし,その加法的汎関数のBhattacharya-Ghosh写像で表現される確率変数の漸近展開を導出し,正当性を証明していたが，この表現は普遍的であるため,ミキシング条件下で確率過程の統計学における多くの統計量が扱える．エルゴード的拡散過程の統計モデルに対する最尤およびM推定量に対して，3次の漸近展開公式を論文として発表した．漸近展開の係数を確率微分方程式の情報で完全に表現している．確率過程によるマーク付き点過程の汎関数のマリアバン共分散の非退化性を調べ，漸近展開を与えた．

● **離散観測下での確率微分方程式の推定問題**

拡散過程のパラメータを離散的な観測に基づいて推定する問題はサンプリング問題と呼ばれ，今日一つの研究分野を形成している．エルゴード的な，ジャンプのある確率微分方程式に対して，以前，擬似最尤推定型推定量を提案し，その一致性，漸近正規性，漸近有効性を証明した．この場合の難しさは，観測の増分がジャンプ項によるのか拡散項によるのか未知であることで，その判別を行う漸近的なフィルタの導入が鍵となっている．多項式型大偏差不等式論によって，確率微分方程式に対する離散観測下のベイズ型推定量の漸近挙動を明らかにした（次項参照）．

離散観測下での拡散過程の推定で，さらにある閾値以下の値は観測されないという意味で欠測のあるサンプリングの問題がある．そのときに擬似最尤型推定量を与え，その漸近挙動を明らかにした．

有限時間離散観測下での確率微分方程式のなす確率回帰モデルに含まれるボラティリティパラメータの変化点問題を研究した．疑似尤度比確率場はある種のウイナー汎関数のランダムな混合に確率場として収束し，変化点推定量の漸近分布を極限確率場によって特定することができる．変化点推定は典型的な非正則問題であり，統計量の収束もデータ数の１／２乗とは異なる．推定量の収束にはタイトネスが必要であり，そのために確率場評価に関する新しい不等式を与えた．

● **多項式型大偏差不等式と確率微分方程式に対する擬似尤度解析**

局所漸近2次構造(LAQ)をもつ統計的確率場に対して多項式型大偏差不等式を証明し,統計的確率場の強い意味の弱収束を示していた.これによって,非線形時系列モデルに対する尤度比確率場の弱収束と大偏差不等式,最尤型推定量およびベイズ型推定量の漸近挙動,裾確率評価および積率収束の問題が解決した.

統計確率場の大偏差評価は,ベイズ推定量の厳密な扱い,高次統計推測理論における統計量の確率展開の剰余項の厳密評価,情報量規準および予測理論において推定量を代入し期待値をとる操作の正当化など,漸近理論を展開する上で現れる数学的困難を解消するために不可欠なものである.７０年代初めにIbragimov-Hasminskii理論が生まれて以来,大偏差不等式の表現が可能な独立観測やガウス時系列に対して理論は適用可能であったが,非線形確率過程に対してそれは課題であった.確率過程の構造自体ではなく尤度比確率場の漸近構造から大偏差評価が一般的に従う.通常の対象ではスコア関数等の加法的汎関数の Lp 評価のみで多項式型大偏差不等式が得られるため,非線形時系列の構造をとくに限定せず尤度解析が可能になった.マルコフ性すら必要としないこともサンプリング問題において有用である.収束率が異なるマルチパラメータの一般的な状況にも適用可能で,ベイズ法に関しては adaptive Bayes estimator の概念も導入し,漸近挙動を明らかにした.マルチスケーリングは,エルゴード的セミマルチンゲールの局所特性量の推定における最適収束率の多様性に対応するため必然的である.この結果から,離散観測ミキシング拡散過程に対して擬似最尤推定量のモーメント収束およびベイズ型推定量の極限定理とモーメント収束,漸近有効性が得られるが,これらは拡散過程に限定しても新しい結果であり,YUIMAパッケージに実装された.さらに,ジャンプ型確率微分方程式の尤度解析が可能となり,ベイズ型推定量の挙動も解明された.また,有限時間離散観測でのボラティリティの最尤型推定量の裾確率評価とベイズ推定量の漸近挙動も明らかになった.これは疑似尤度比確率場が局所漸近混合正規となる非エルゴード的統計であるが,我々の枠組みは適用可能である.統計的確率場のある種の非退化性が本質的になるが,時刻０で完全非分離となる時系列構造が普通にあるので,その検証は重要である.拡散型過程の場合に判定条件を与えた.

● **非同期共分散推定量の提唱と漸近挙動の解明**

2つの拡散過程間の共分散構造を推定することはファイナンスデータ解析の基本的な問題である.クレジットリスクの評価にも関係する.売買が成立したときのみ株価が観測されると考えられるが,2つの銘柄の観測時間が同期しないのが普通である.この場合,同期しない離散的なデータからデータの補間によって同期するデータに修正し共分散をもとめる"リアライズド・ボラティリティ"の方法が幾つか提案されているが,それらは,観測の間隔が小さくなるときバイアスが生じることが指摘されている(Epps 効果).最近我々が提唱した非同期共分散推定量はデータの修正を一切行わない方法で,積分変換等にも基づかないので完全にチューニングパラメータフリー,しかも計算するときの和が実質的に 1 次元的で計算量の観点でも有利なものである.非同期共分散推定量が一致性,漸近正規性を持つことがHayashi and Yoshida(Bernoulli2005,AISM2008)で証明された.サンプリングの機構が複雑なため,従来の確率解析学の計算法が馴染みにくい問題だが,幾つかの技巧により解決している.また,その後提案された類似の方法の中でも最も漸近分散が小さくなることが報告されている.サンプリング時刻が一般の停止時で,ボラティリティも一般の確率過程の場合に,strong predictability の概念を導入し,非同期共分散推定量の漸近混合正規性と安定収束の証明に成功した.

Dalalyan 氏と, レバレージなしの場合に推定量の漸近展開を与えた. 証明には摂動法と, セミマルチンゲールの安定収束の理論が使われている. 主要項の高次の分布近似を決定するキュムラントの計算は, 2時間軸のため複雑になる.

HY型の推定関数によって時間の相対化が可能となり, リード・ラグ推定問題においてそのアイデアに基づく確率場を考え, 一致推定量を与えることができる. 高頻度データから企業間のリード・ラグが捉えられた.

- **混合型分布の場合の漸近展開**

強可予測核を持つセミマルチンゲールの増分の2次変動過程はボラティリティ・パラメータの推定量として自然に現れる. その誤差分布に対して, 混合ガウス過程への安定的収束が起きるが, それに対応する漸近展開は未知であった. 通常, ガウス極限や独立増分過程が極限となる場合, 確率過程の指数関数に対するポテンシャル(指数関数をマルチンゲールにするような因子の対数)は, 極限を記述する決定論的な三つ組みで決まりランダムではなく, そのために期待値との交換が起きる. このことが伝統的な極限定理の証明の一つの本質的な部分であったが, 三つ組みがランダムになる混合型極限の場合, この方法が全く使えなくなる. 技術的な困難はこのように現れるが, これは混合成分に関する条件つき確率のもとでマルチンゲールがマルチンゲールでなくなるということの裏返しでもある.

混合型極限は統計の文脈では, フィッシャー情報量が極限においてランダムになるいわゆる非エルゴード統計の状況である. そこではマルチンゲールのエネルギーによるスチューデント化が自然な操作であり, それらの結合分布の挙動が重要になる. このように, 条件付けする確率変数の値を与えたもとでのマルチンゲールの歪みを計算することで, 混合型極限の場合の漸近展開が得られる. 条件つき確率を扱うことから理解されるように, 展開係数の無限次元解析的な表現が現れる. ランダムシンボルを定義し, その随伴によって漸近展開式が与えられる.

- **確率過程の統計解析・シミュレーションのためのソフトウエア開発(YUIMA プロジェクト)**

確率過程の統計解析およびシミュレーションのためのソフトウエアの開発を行った. 統計科学で標準的な R 上に構築し, オブジェクト指向のプログラミングを行った. 確率微分方程式, (非正則)時系列データ, サンプリング法のオブジェクト化を行い, それに対する統計処理とシミュレーションを行う様々な関数を実装, 試験, 改良を繰り返した. R-forge に開発ページを設け, パッケージを公開している.

3. 今後の展開

非線形時系列に対する高次統計推測論に関して, エルゴード的確率過程の漸近展開は近年ファイナンスの現象を精密に議論するための道具として利用されている.このような研究は応用上有益であろう. 離散観測下での確率微分方程式の推定問題は, 実装のためにも重要である. 許容されるジャンプ構造のアクティビティの一般化, 有限時間観測, 非正則問題に対する大偏差不等式と疑似尤度解析の確立, サンプリング頻度の低減, 推定アルゴリズムの適合化が重要である. 非同期共分散推定は数学的に厳密な定式化がなされたのは比較的最近であり, その極限定理は確率統計学の対象としても重要である. 非同期従属サンプリング・フィードバックありで共分散推定量が混合型極限となる場合に漸近展開を与えることは当面もっとも挑戦的な課題であろう. ソフトウエアの実装に関して, 一連の実験を通して, その大規模化の可能性が見えている. また,

各モジュールの有機的結合とパフォーマンス向上のために，新しいアイデアが多数あり，YUIMA全体の構造変化を伴うため，それは新しいプロジェクトとして行う予定である．

4．自己評価

確率微分方程式に対するデータ解析の基礎理論は，疑似尤度解析の定式化によって成り，ジャンプ型過程にも適用範囲を広げ，ベイズ法の漸近挙動の解明も含めて進展があった．混合型極限における漸近展開法が見出されたことは，非エルゴード的統計学において高次統計推測論が始まるきっかけとなるかもしれない．分散デリバティブ等ファイナンスへの応用も期待している．非同期共分散推定問題は，マイクロストラクチャーも含めて，国際的にも重要性が認識されており，それに関係する論文はすでに多い．"Hayashi-Yoshida 推定量"と呼ばれている推定量の提案に始まり，非同期従属サンプリング下での漸近混合正規性の証明を与えたが，この分野に新しい研究の題材を提供できたものと思う．理論から得られる決定関数の計算やその評価の手段として，ソフトウエアとしての実装は避けられない課題である．本研究では，Ｒによるオブジェクト指向のシステムを構築し，確率微分方程式の疑似尤度解析，非同期共分散推定，漸近展開，ジャンプ過程の生成，確率微分方程式のシミュレーション等のモジュールを構築し，R-forge に発表した．本課題におけるシステム構築の実験的試みは成功したと判断する．確率過程の統計推測理論をソフトウエアとして具現することは，多くのモジュールが同時に機能することではじめて可能となる．理論の基礎においても発展中であり，この試みが理論統計学の殆ど全分野にまたがり，したがって，多くの基礎的な問題を解かなければならないが，これは必然であるし，これまで類例がないのも理解される．

5．研究総括の見解

確率微分方程式に対するデータ解析の基礎理論、確率数値計算および半解析的方法による期待値の近似、種々の近似法のオプションやリスク評価への応用を課題とし、確率過程の統計推測理論、漸近分布論、保険数理・ファイナンスへの応用を包括的に研究するとともに、ソフトウエアの実装研究を行なった。

6．主要な研究成果リスト

（1）論文（原著論文）発表

	1. Yuji Sakamoto, Nakahiro Yoshida: Asymptotic Expansion for Stochastic Processes: an overview and examples. J. Japan Statistical Society, 38, 173-185 (2008)
	2. 林 高樹、吉田 朋広: 高頻度金融データと統計科学、21 世紀の統計科学 I：社会・経済の統計科学、267-304（2008）
	3. Takaki Hayashi, Nakahiro Yoshida: Asymptotic normality of a covariance estimator for nonsynchronously observed diffusion processes. Annals of the Institute of Statistical Mathematics, 60, 367-406 (2008)
	4. Takaki Hayash, Nakahiro Yoshida: Asymptotic normality of a nonsynchronous covariance estimator for diffusion processes. Annals of the Institute of Statistical Mathematics, 60, no. 2, 357-396 (2008)
	5. Stefano Iacus, Masayuki Uchida, Nakahiro Yoshida: Parametric estimation for partially hidden diffusion processes sampled at discrete times. Stochastic Processes and their Applications, 119, 1580-1600 (2009)
	6. Yuji Sakamoto, Nakahiro Yoshida: Third-order asymptotic expansion of M-estimators for diffusion processes. Annals of the Institute of Statistical Mathematics, 61, 629-661

	(2009)
	7. Stefano Iacus, Nakahiro Yoshida: Estimation for the change point of the volatility in a stochastic differential equation. Theor. Probability and Math. Statist. No. 78, 37-47 (2009)
	8. Yuji Sakamoto, Nakahiro Yoshida: Asymptotic Expansion for Functionals of a Marked Point Process. Communications in Statistics - Theory and Methods, 39, Issue 8 & 9, 1449-1465 (2010)
	9. Stefano Iacus, Nakahiro Yoshida: Numerical Analysis of Volatility Change Point Estimators for Discretely Sampled Stochastic Differential Equations. Economic Notes by Banca Monte dei Paschi di Siena SpA, 39, no. 1/2-2010, 107-127 (2010)

（2）特許出願

研究期間累積件数：0 件

（3）その他（主要な学会発表、受賞、著作物等）

1. 第 14 回日本統計学会賞 （2009 年 9 月） http://www.jss.gr.jp/ja/society/prize.html
2. Quasi-likelihood analysis and limit theorems for stochastic differential equations（招待） Market Microstructure, Confronting Many Viewpoints, Institut Louis Bachelier, Paris (2010.12.6-10)
3. Inference for Discretely Observed Diffusion Processes（招待）1st R/ Rmetrics Summer School and 4th User/ Developer Meeting on Computational Finance and Financial Engineering, Meielisalp（2010.6.29）
4. Martingale expansion : mixed normal limit and applications（招待）International conference "DYNSTOCH meeting", Université d'Angers, Angers（2010.6.17）
5. Asymptotic expansion for a martingale with a mixed normal limit distribution（招待） DYNSTOCH Meeting 2009 Humboldt-Universität zu Berlin（2009.10.8）
6. Asymptotic expansion for the asymptotically conditionally normal law（招待，オーガナイザー）Asymptotical Statistics of Stochastic Processes VII, Université du Maine, Le Mans （2009.3.16）