

研 究 報 告 書

「「計算機システムの科学」のための数学」

研究期間：平成19年10月～平成23年3月

研究者：蓮尾 一郎

1. 研究のねらい

計算機システム(=計算機を用いた情報処理システム)を正しく設計することはとても難しく、その欠陥が大きな社会的、経済的損害を与える例は枚挙に暇がありません。本研究では、物理学におけるデカルト直交座標のような、「計算機システムの科学」における数学的基礎を構築することを目指しました。その成果により、正しい計算機システムの設計が容易になると同時に、抽象数学の研究の対象たりうる新たな構造が発見されることを期待しました。

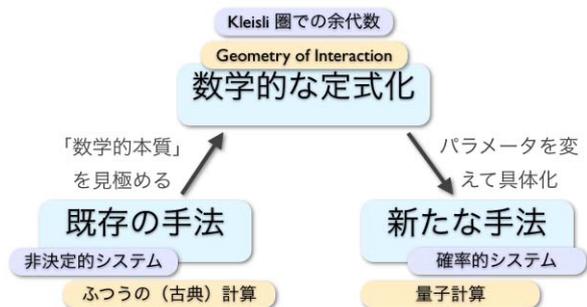
2. 研究成果

上に述べた目標に対して、圏論(数学の異なる分野に共通して現れる性質・構成を一括して記述するために現れた抽象的フォーマリズム)を用いて定式化した代数・余代数の理論を主に用いて研究を行い、以下の成果を得ました。

● 数学による抽象化と、新たな設計・検証手法の創発

数学(特に圏論)の抽象性・一般性を活かすことで、計算機システムの設計・検証手法に対して以下のようなシナリオが可能になります。

1. 既存の手法の数学的定式化を試みる。この際、その手法の数学的本質が明らかになる。
2. 得られた数学的定式化は一般的・抽象的なものになっている。この一般性を活かしパラメータを他のものに取り替えることで、新たな設計・検証手法が得られる。

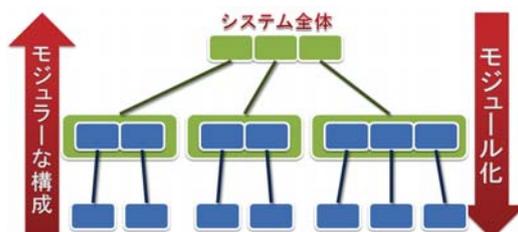


実際、論文[3,4]において、既存の非決定的システム(Aという動作をするかもしれないし、Bという動作をするかもしれない)に対する検証手法の一つを、Kleisli圏の余代数を用いて数学的に定式化し、さらにパラメータを取り替えることで確率的システム(たとえば、Aという動作をする確率は1/3、Bは2/3)に対する手法に移転しました。より具体的に論文[4]では、確率的システムに対する既存のアドホックな検証手法に対して、数学的裏付けと一般化を与えました。また論文[3]では、このようにして得られた検証手法をネットワーク・プロトコルに応用し、ネットワーク匿名性を検証するための工学的手法を得ました。

さらに投稿中の論文[Hasuo&Hoshino,2011]では同じシナリオを量子計算(量子力学の原理を用いた新たな計算パラダイム)に対して試みています。具体的には、量子計算のための関数型プログラミング言語の意味論(プログラムの「意味」を定める枠組み、プログラム検証やプログラム変換の基礎となる。量子計算に対するそれについてはこれまで部分的な成果しかなかった)を、普通の計算のための数学的手法(GirardのGeometry of InteractionのAbramsky et. alによる定式化)を一般化して適用することで与えました。やはりこの際、圏論の一般性・抽象性がフル活用されています。

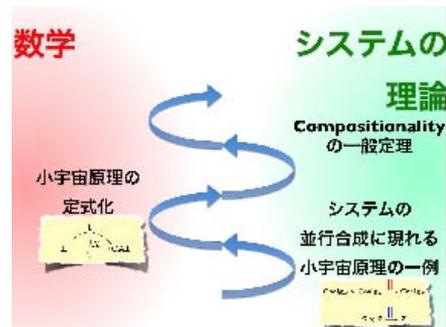
● システムのモジュールな設計・検証に対する、数学的基礎付けと新展開

近年の計算機システムの複雑さは文字通り天文学的ですが、その対処法として「全体のシステムをいくつかの構成要素システム(モジュール)に分割し、それぞれを正しく



設計した後に組み合わせる」というモジュラーな設計・検証パラダイムが注目されています。

本研究では論文[1]において、このモジュラーな設計の背後にある数学的構造を同定しました。ここでは、モジュール(あるいはシステム)を余代数として表現し、それらの組み合わせオペレータが余代数の圏における代数構造をなします。さらにシステムの「振る舞い」を考えることにより終余代数における代数構造が現れ、さきの代数構造と合わせて2重入れ子の代数構造(Baez&Dolanの小宇宙原理)がたち現れます。



この観察を元に、まず数学的な結果として小宇宙

原理の高次元圏を用いた定式化を得て、さらにこれを再度システムの理論に引き戻すことでモジュラーな設計・検証において基本的なcompositionalityの一般定理を得ました。これは数学とシステムの理論との間の相互刺激、上向きスパイラルの一例になっています。

この結果を受けて論文[3]では、システムの組み合わせ方としてフィードバックも許される場合のcompositionalityについて考察しました。特にこの結果から、ゲームにおけるメモリ付き戦略(resumption)の圏がJoyal-Street-Verityの意味でのtrace operatorを持つという一般定理を導きました。

- その他の数学的構造に対する結果移転

数学的な研究アプローチをとっていると、得られた知見が思わぬ一般性を獲得することがあります。この一般性を活かして、計算機科学・数学にまたがるさまざまなトピックに挑戦しました。たとえば、論文[5]では前層の圏の余代数を用いて、自己相似図形の各点を記号の無限列の同値類で一对一に表現するフラクタルの表現定理を得ました。また、代数・余代数的考察の関数型言語の意味論への応用も行いました。

3. 今後の展開

- 情報学とともに発展する新たな数学に向けて

そもそも計算機システムのような情報学的対象には、さまざまな自然現象のような物理学の対象と異なり、その動作・時間発展をイメージしにくいという困難があります。たとえば液体の流れはアニメーションで表現できますが、コンピュータの動作はそうはいきません。このような「眼に見えない」現象を記述するために、(特に代数学をはじめとする)現代の抽象数学が果たす役割は大きなものになると考えます。

また計算機システムに関するもうひとつの困難として近似が意味をもたないことがあげられます。これは、物理学的数据に対しては連続性から近似が強力な武器になる一方、計算機システムにおけるデータは離散的であり、たとえば数万のパラメータの一つの値がちがうだけでシステム全体の振る舞いがまったく変わってしまうことがあります。現代数学の大きな部分は物理学との両輪で発展してきましたが、このような情報学的応用は新たな数学の萌芽の可能性を導くものだと考えます。

以上をふまえて、今後も情報学・数学の互惠関係、上向きスパイラルを引き起こすべく研究を進めていきます。具体的には、まず抽象数学の諸結果が計算機システムに対して導く知見の再検討を行います。たとえば幾何学を起源とし現代数学のあらゆる場面に現れるホモロジー代数の応用について研究を進めていきます。また同時に、計算機システムの応用例から数学的構造を抽出することを、(論文[1]の小宇宙原理の定式化にひき続いて)進めていきます。

- 社会にインパクトを与える工学的成果に向けて

これまで得られた、またはこれから得られる理論的・数学的成果について、その工学的・社会的インパクトをさらに追求していきます。たとえば小宇宙原理から導かれるcompositionalityの結果(論文[1])の既存の商用フレームワークに対する移転や、論文

[4]の検証手法に基づいた実用的な検証ツールなどです。

また、本研究を通じて明らかになったのは、量子計算をはじめとする新たな計算パラダイム(動作原理が新しいゆえに直感的にその動作をイメージしにくい)に対する、数学的手法の有効性です。特に自動車業界をはじめ産業界で注目されるハイブリッド・システム(離散データだけでなくセンサーからの連続的データも扱うシステム)の検証手法について、現在研究を進めています。

5. 自己評価

当初目標に挙げた「計算機システムの(デカルト座標に匹敵する)基礎理論」に関しては、本研究、特に同僚のさきがけ研究者との議論を通じて「そもそも不可能だったのではないか」という結論に至りました。というのは、(たとえばTuring機械に還元して理解できる「計算」に対して)「計算機システム」においてはその複雑さ・内部の相互作用の重要さゆえに、基本法則に立ち戻ってボトム・アップに現象を理解する要素還元主義が通用しないのです。これは物理現象における複雑系とおなじ状況です。このような状況においては、さまざまな理論は(複雑な対象に対して)それぞれ独自の「切り口」を提供し、理論間ではその切り口の鋭さを競うこととなります。

ただし計算機システムが物理的・生物的・社会的複雑系と異なるのは、人工物であるがゆえに要素還元主義が通用するように「作る」ことができるという点です(たとえばモジュラーな設計)。この際、数学的(特に代数・余代数的)「切り口」は自然な(カノニカルな)作り方を提供します。このような、計算機システムに対する数学的アプローチの有用性の実証・発展に対して、本研究の成果を通じて貢献できたと考えます。

6. 研究総括の見解

主に圏論を用いて定式化した代数・余代数の理論を用いた研究を行い、数学による抽象化と新たな設計・検証手法の創発、およびシステムのモジュラーな設計・検証に対する数学的基礎付けと新展開を得ることができた。これにより、計算機システムに対する数学的アプローチの有用性における実証・発展に貢献した。

7. 主要な研究成果リスト

(1)論文(原著論文)発表

1. Ichiro Hasuo, Bart Jacobs and Ana Sokolova. The Microcosm Principle and Concurrency in Coalgebra. Proc. <i>Foundations of Software Science and Computation Structures (FoSSaCS 2008)</i> . Lect. Notes Comp. Sci. 4962, p. 246–260. Springer-Verlag. 2008.
2. Ichiro Hasuo and Bart Jacobs. <i>Traces for Coalgebraic Components</i> . To appear in <i>Mathematical Structures in Computer Science</i> , Cambridge University Press. (採択済)
3. Ichiro Hasuo, Yoshinobu Kawabe and Hideki Sakurada. <i>Probabilistic Anonymity via Coalgebraic Simulations</i> . <i>Theoretical Computer Science</i> , 411(22–24):2239–2259, 2010. Elsevier.
4. Ichiro Hasuo. Generic Forward and Backward Simulations II: Probabilistic Simulation. Proc. <i>CONCUR 2010 – Concurrency Theory</i> . Lect. Notes Comp. Sci. 6269, p. 447–461. Springer-Verlag. 2010.
5. Ichiro Hasuo, Bart Jacobs, and Milad Niqui. Coalgebraic Representation Theory of Fractals (Extended Abstract). Proc. <i>Mathematical Foundations of Programming Semantics (MFPS XXVI)</i> . <i>Electr. Notes Comp. Sci.</i> 265:351–368, 2010. Elsevier.

(2)特許出願

研究期間累積件数:0件

(3)その他(主要な学会発表、受賞、著作物等)

➤ 学会発表

1. The Microcosm Principle and Concurrency in Coalgebra. FoSSaCS 2008, Budapest, Hungary. March 2008
2. Coalgebraic Components in a Many-Sorted Microcosm. CALCO 2009, Udine, Italy. September 2009
3. Coalgebraic Representation Theory of Fractals. MFPS XXVI, Ottawa, Canada. May 2010.
4. Generic forward and backward simulations II: Probabilistic simulation. CONCUR 2010, Paris, France. September 2010